Stichworte und Formeln zur Vorlesung

Theoretische Physik I (Mechanik)

Heinz Horner

Institut für Theoretische Physik

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

SS 2003

Inhalt

1 Vorbemerkungen **1**

2 Raum und Zeit in der Newtonschen Mechanik **3**

3 Grundgesetze der Newtonschen Mechanik **6**

4 Eindimensionale Bewegung **9**

5 Bewegung im Zentralpotential **12**

6 Das Keplerproblem **15**

7 Streuung an einem Zentralpotential **18**

8 Verallgemeinerte Koordinaten, Lagrangegleichungen **22**

9 Hamiltonformalismus **31**

10 Kanonische Transformationen **35**

11 Erhaltungsgrößen, integrable Systeme **40**

12 Nichtintegrable Systeme, Chaos. **45**

13 Kleine Schwingungen **50**

14 Kontinuumsmechanik, schwingende Saite **54**

15 Bewegung starrer Körper **57**

16 Ausblick **63**

17 Aufgaben **64**

1 Vorbemerkungen

Vorlesung, Übungen, Klausuren, Scheine:

Vorlesung:	Di, Fr 11.15-13.00 Uhr, Im Neuenheimer Feld 308 HS 2
Übungen:	Mi 9-11 INF 227/ 11-13 INF 294 ÜR/ 14-16 INF 227.
Klausuren:	Di 17.6.03 und Di 22.7.03
Scheinvergabe:	60% der Punkte für Übungsaufgaben und jeweils 30% der Punkte in den beiden Tests.

Sprechstunde:

Dienstag 14.30-15.30.
(Anmeldung per E-Mail "horner@tphys.uni-heidelberg.de" erwünscht)

Kursvorlesungen:

I	Mechanik	(Vordiplom Kl.)
II	Elektrodynamik	(Seminar)
III	Quantenmechanik	(Seminar)
IV	Statistische Physik	(Seminar)

Weiterführende Vorl.:

Quantenfeldtheorie
Theor. Festkörperphysik
Allg. Relativitätstheorie
Hydrodynamik $\cdots$

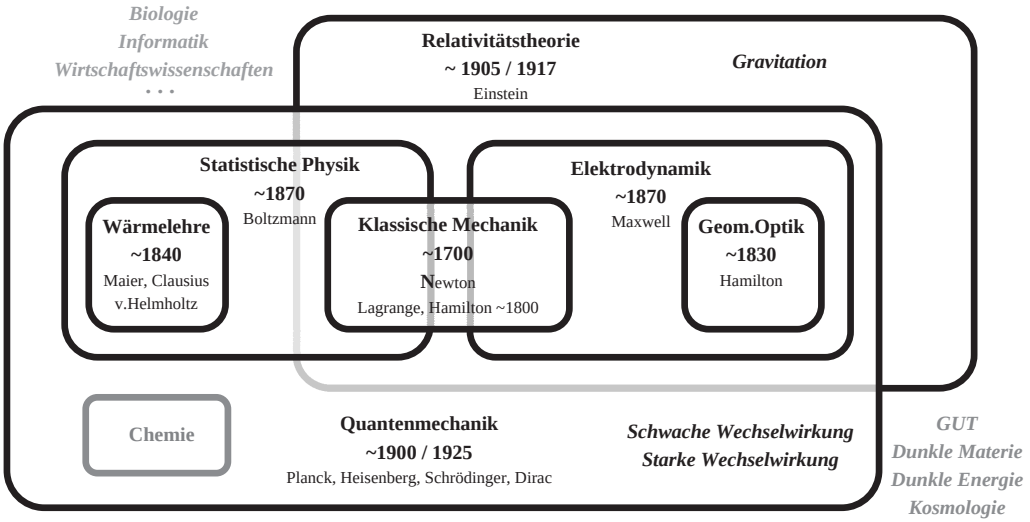
Literatur:

H. Goldstein: Klassische Mechanik (Akad. Verlagsgesellschaft)
F. Scheck: Mechanik (Springer)
J. Honerkamp, H. Römer: Klassische Theoretische Physik (Springer)
V.I. Arnold: Math. Methods of Classical Mechanics (Springer)
G. Ludwig: Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik I (Vieweg)

Zur Methode:

Wirklichkeitsbereich	Abbildungsvorschrift	Mathematik
Reale Gegebenheiten (physikalische Objekte, Meßapparate)	Idealisierung → Unscharfe Zuordnung	Mathematische Objekte (Zahlen, Mengen ...)
Beobachtungen, Experimente	Naturgesetze → Modelle	Axiome, Relationen
⇓		⇓ (Näherungen)
Vergleich	⇐	Sätze Aussagen
↳	Erweiterter Gültigkeitsbereich Verbesserte Näherungen Übergeordnete Theorie	

Kleiner historischer Überblick:



1 19.04.03

2 Raum und Zeit in der Newtonschen Mechanik

Raum:

Reale Gegebenheit: Bezugssystem, z. B. Wände eines Zimmers. Im Bezugssystem fixierte Stellen (physikalische Punkte) A, B. Messvorschrift für Abstände $d_{A,B}$ (z.B. Schnur mit Marken, willkürliche Längeneinheit).

Mathematik: Euklidische Geometrie (dreidimensionaler Raum).

Abbildungsvorschrift:

Wände des Zimmers	$\Longleftrightarrow$	Koordinatensystem (z.B. kartesisch)
A	$\Longleftrightarrow$	$\vec{r}_A \equiv (x, y, z) \equiv \{x_\alpha\}; \qquad \alpha = 1 \cdots 3$
d_{AB}	$\Longleftrightarrow$	$\|\|\vec{r}_A - \vec{r}_B\|\| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

Vergleich: z.B. Geodäsie: Euklidische Geometrie auf kleinräumiger Skala, sphärische Geometrie auf großräumiger Skala. — z.B. Allgemeine Relativitätstheorie.
Grundlage der Newtonschen Mechanik: Euklidische Geometrie.
Dreiecksungleichung: $d_{A,C} \leq d_{A,B} + d_{B,C} \quad \cdots$

Wechsel des Bezugssystems: $\mathcal{S} \longleftrightarrow \mathcal{S}'$

In $\mathcal{S}$: $\quad \vec{r} \equiv \{x_\alpha\}$ $\qquad$ in $\mathcal{S}'$: $\quad \vec{r} \equiv \{x'_\alpha\}$

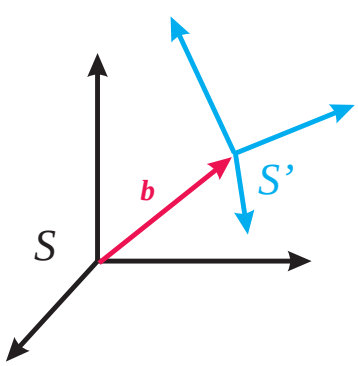
Forderung: $\|\vec{r}_A - \vec{r}_B\|_{\mathcal{S}} = \|\vec{r}_A - \vec{r}_B\|_{\mathcal{S}'}$

Koordinatentransformation:

$$x'_\alpha = \sum_\beta A_{\alpha,\beta}\, x_\beta - b_\beta \qquad\qquad \vec{r}\,' = \underline{A} \cdot \vec{r} - \vec{b} \tag{2.1}$$

Orthogonale Matrix $A_{\alpha,\beta} = (A^{-1})_{\beta,\alpha}$

$$\sum_\gamma A_{\alpha,\gamma} A_{\beta,\gamma} = \sum_\gamma A_{\alpha,\gamma} (A^{-1})_{\gamma,\beta} = \delta_{\alpha,\beta} \qquad\qquad \underline{A} \cdot \underline{A}^\dagger = \underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{1} \tag{2.2}$$



Kroneckersymbol:

$$\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{2.3}$$

Ursprung des Koordinatensystems $\mathcal{S}'$

$$\vec{o}_{\mathcal{S}'} = \underline{A}^{-1} \cdot \vec{b} \tag{2.4}$$

Zeit:

Reale Gegebenheit: Ereignis $\mathcal{A}$, z.B. Aufleuchten einer Lampe am Ort A. Messvorschrift für zeitliche Abstände $\tau_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ (Uhr). Zeitnullpunkt und Zeiteinheit willkürlich. Synchronistationsvorschrift für Uhren (z.B. Transport) zur Bestimmung von gleichzeitigen Ereignissen an verschiedenen Orten.

Mathematik: Reelle Zahlen.

Abbildungsvorschrift:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \Longleftrightarrow & \{\vec{r}_{\mathcal{A}}; t_{\mathcal{A}}\} \\ \tau_{\mathcal{A},\mathcal{B}} & \Longleftrightarrow & t_{\mathcal{A}} - t_{\mathcal{B}} \end{array}$$

Vergleich: z.B. $t_{\mathcal{A},\mathcal{C}} = t_{\mathcal{A},\mathcal{B}} + t_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$

Wechsel des Bezugssystems: $\mathcal{S} \longleftrightarrow \mathcal{S}'$

Für gleichzeitige Ereignisse:

$$||\vec{r}_{\mathcal{A}} - \vec{r}_{\mathcal{B}}||_{\mathcal{S}} = ||\vec{r}_{\mathcal{A}} - \vec{r}_{\mathcal{B}}||_{\mathcal{S}'} \qquad \text{falls} \qquad t_{\mathcal{A}} = t_{\mathcal{B}} \tag{2.5}$$

Absolute Zeit:

$$\left(\tau_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\right)_{\mathcal{S}} = \left(\tau_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\right)_{\mathcal{S}'} \qquad \text{für beliebige} \quad ||\vec{r}_{\mathcal{A}} - \vec{r}_{\mathcal{B}}|| \tag{2.6}$$

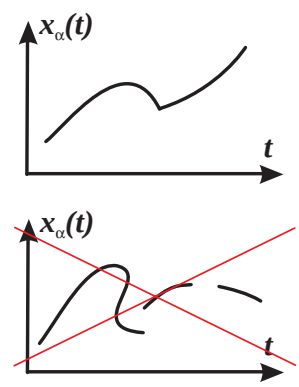
Transformation:

$$\begin{aligned} x'_\alpha &= \sum_\beta A_{\alpha,\beta}(t)\, x_\beta - b_\alpha(t) \\ t' &= t - t_0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Trajektorie, Bahn[1]:

Stetige Folge von Ereignissen, Bewegung eines Punktes

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \{x_\alpha(t)\} \tag{2.8}$$



eindeutig, stetig.

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t) \qquad v_\alpha(t) = \frac{d}{\mathrm{d}t}x_\alpha(t) \tag{2.9}$$

beschränkt, stückweise stetig .

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(t) \tag{2.10}$$

Wechsel des Bezugssystems $\mathcal{S} \longleftrightarrow \mathcal{S}'$

$$t' = t + t_0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot{} \tag{2.11}$$

[1]Siehe auch: Hl. Thomas von Aquin: Summa Theologiae 1.Teil, 52.Frage: Von der Ortsbewegung der Engel. *http://www.himmelsboten.de/Engel/Kirchl/StThom/Sumtheol.htm*

Geschwindigkeit in $\mathcal{S}'$: mit (2.9)

$$\vec{v}\,'(t') = \underline{A}(t) \cdot \vec{v}(t) + \dot{\underline{A}}(t) \cdot \vec{r}(t) - \dot{\vec{b}}(t) \tag{2.12}$$

Beschleunigung in $\mathcal{S}'$:

$$\vec{a}\,'(t') = \underline{A}(t) \cdot \vec{a}(t) + 2\,\dot{\underline{A}}(t) \cdot \vec{v}(t) + \ddot{\underline{A}}(t) \cdot \vec{r}(t) - \ddot{\vec{b}}(t) \tag{2.13}$$

<u>Beachte !</u> Das Transformationsverhalten von Geschwindigkeit und Beschleunigung ist durch die relative Bewegung der Bezugssysteme zueinander bestimmt.

Galilei-Transformationen:

Spezielle Transformationen mit

$$\dot{\underline{A}} = 0 \qquad \dot{\vec{b}}(t) = \vec{u} \qquad \vec{b}(t) = \vec{b}_0 + \vec{u}\,t \tag{2.14}$$

und daraus folgend:

$$\vec{a}\,'(t') = \underline{A} \cdot \vec{a}(t) \qquad \vec{v}\,'(t') = \underline{A} \cdot \vec{v}(t) - \vec{u} \qquad \vec{r}\,'(t') = \underline{A} \cdot \vec{r}(t) - \vec{u}\,t - \vec{b}_0 \tag{2.15}$$

<u>Anmerkung:</u> Wir werden sehen, daß die Gesetze der Newtonschen Mechanik invariant gegenüber Galilei-Transformationen sind (Postulat!)

<u>Gruppeneigenschaft:</u> Es seien $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\underline{A}, \vec{u}, \vec{b})$ und $\mathcal{G}' = \mathcal{G}(\underline{A}', \vec{u}\,', \vec{b}\,')$ Galileitransformationen (mit $t'' = t' = t$). Dann ist $\mathcal{G}'' = \mathcal{G}(\underline{A}'', \vec{u}\,'', \vec{b}\,'')$ ebenfalls Galileitransformation mit

$$\underline{A}'' = \underline{A}' \cdot \underline{A} \qquad \vec{u}\,'' = \underline{A}' \cdot \vec{u} + \vec{u}\,' \qquad \vec{b}\,'' = \underline{A}' \cdot \vec{b} + \vec{b}\,' \tag{2.16}$$

dabei kommt es auf die Reihenfolge der Transformationen an, i.e. im allgemeinen ist $\underline{A}' \cdot \underline{A} \neq \underline{A} \cdot \underline{A}'$. **2** 02.05.03

3 Grundgesetze der Newtonschen Mechanik

Gegenstand der Mechanik: Trajektorien $\vec{r}_i(t)$ von Teilchen ("Massenpunkten") mit Masse m_i.

1. Newtonsches Gesetz:

Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

$$\dot{\vec{v}}(t) = 0. \tag{3.1}$$

Da die gemessene Geschwindigkeit von der Wahl des Bezugssystems abhängt, ist dieses Gesetz sowohl als Aussage über mögliche physikalische Zustände (keine äußeren Kräfte), wie auch über Bezugssysteme zu werten. Ein System, in dem (3.1) gilt, wird als Inertialsystem bezeichnet. Durch eine Galilei-Transformation wird ein Inertialsystem wieder in ein Inertialsystem überführt.

Relativitätsprinzip der Newtonschen Mechanik:

Naturgesetze (Gesetze der Newtonschen Mechanik) sind invariant gegenüber Galilei-Transformationen.

Damit sind letztlich alle Inertialsysteme gleichberechtigt. (In der speziellen Relativitätstheorie wird dieses Relativitätsprinzip durch Invarianz gegenüber Lorentz-Transformationen gefordert.)

2. Newtonsches Gesetz:

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

$$m_i \, \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i(t) \tag{3.2}$$

Dabei ist die Masse m_i als Eigenschaft des Teilchens i anzusehen. Da (3.2) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, ist die Festlegung von zwei Integrationskonstanten notwendig, um die Lösung eindeutig zu machen. Dies kann in Form von Anfangsbedingungen $\vec{r}_i(t_0)$ und $\vec{v}_i(t_0)$ zu einer Zeit t_0 geschehen, aber beispielsweise auch durch Angabe von $\vec{r}_i(t_0)$ und $\vec{r}_i(t_1)$ für $t_1 \neq t_0$.

Transformationsverhalten bezüglich Galilei-Transformationen

$$\vec{F}_i'(t') = \underline{A} \cdot \vec{F}_i(t) \qquad m_i' = m_i \tag{3.3}$$

3. Newtonsches Gesetz:

Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder, die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

$$\vec{F}_{i,j}(t) = -\vec{F}_{j,i}(t) \tag{3.4}$$

Einige abgeleitete Begriffe:

Integration entlang einer Trajektorie:

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \vec{F}(t) = m \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \dot{\vec{v}}(t) = m\, \vec{v}(t_1) - m\, \vec{v}(t_0) \tag{3.5}$$

<u>Impuls:</u>

$$\vec{p}(t) = m\, \vec{v}(t) \qquad \vec{p}\,'(t') = \underline{A} \cdot \vec{p}(t) + m\, \vec{u} \tag{3.6}$$

<u>Arbeit:</u> (Entlang einer Trajektorie geleistete Arbeit)

$$A(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \vec{v}(t) \cdot \vec{F}(t) = m \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, \vec{v}(t) \cdot \dot{\vec{v}}(t) = T(t_1) - T(t_0) \tag{3.7}$$

<u>Kinetische Energie:</u>

$$T(t) = \tfrac{1}{2}\, m\, v(t)^2 \tag{3.8}$$

<u>Kraftfelder:</u> Elektrische- oder Gravitationskräfte sind beispielsweise durch Kraftfelder gegeben:

$$\vec{F}(t) = \vec{K}\Big(\vec{r}(t)\Big) \tag{3.9}$$

Eine Trajektorie $\vec{r}(t)$ definiert eine durchlaufene Raumkurve $\mathcal{C}$. Mit $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t$ und $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ b.z.w. $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ ist

$$A(t_1, t_0) = \oint_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{K}(\vec{s}) \tag{3.10}$$

Falls A nur von $\vec{r}_0$ und $\vec{r}_1$ abhängt, aber nicht vom dazwischen durchlaufenen Weg, spricht man von konservativen Kräften. Für <u>konservative Kräfte</u> existiert ein Potential $V(\vec{r})$ so daß

$$\vec{K}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \qquad \text{und} \qquad A(t_1, t_0) = V(\vec{r}_0) - V(\vec{r}_1). \tag{3.11}$$

Die oben erwähnten elektrischen und gravitativen Kräfte sind konservativ.

<u>3. Newtonsches Gesetz</u> für wechselwirkende Teilchen und konservative isotrope Zweiteilchenkräfte:

$$V(\{\vec{r}_i\}) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} W(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \tag{3.12}$$

Kraft auf Teilchen i:

$$\vec{F}_i(t) = -\vec{\nabla}_i V\Big(\{\vec{r}(t)\}\Big) \qquad V(\{\vec{r}\}) = \sum_i V(\vec{r}_i) + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} W(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{3.13}$$

Erhaltungssätze:

<u>Energiesatz:</u> Für konservative Kräfte sei die Energie definiert als

$$E = T + V = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 + V(\{\vec{r}\}) \tag{3.14}$$

Mit (3.2)

$$\dot{E} = 0 \tag{3.15}$$

Impulssatz: Ohne äußere Kräfte $V(\vec{r}) = 0$ und für translationsinvariante Wechselwirkung $W(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ gilt für den Gesamtimpuls

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i \qquad \dot{\vec{P}} = 0 \tag{3.16}$$

Drehimpulssatz: Für rotationssymmetrische äußere Kräfte $V(|\vec{r}|)$ und für isotrope translationsinvariante Wechselwirkung $W(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ gilt für den Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i m_i \, \vec{r}_i \times \vec{v}_i \qquad \dot{\vec{L}} = 0 \tag{3.17}$$

Anmerkung: Es kann zweckmäßig sein, zwischen Vektoren, z.B. $\vec{r}$ oder $\vec{v}$, und axialen (Pseudo-) Vektoren, z.B. $\vec{L}$, zu unterscheiden. Letztere sind in einem dreidimensionalen Raum als Vektorprodukt von zwei Vektoren, allgemeiner als antisymmetrische Tensoren gegeben.

Anmerkung: Nach dem Galilei-Relativitätsprinzip sollte die Physik in jedem Inertialsystem gleich sein. Dies gilt beispielsweise für Kräfte, die aus einem Potential abgeleitet werden können (Gravitation, elektrische Kräfte), aber nicht für magnetische Kräfte, die einer besonderen Behandlung bedürfen. Die Elektrodynamik ist nicht galileiinvariant, sondern invariant gegenüber Lorentz-Transformationen (spezielle Relativitätstheorie). Das Galilei-Relativitätsprinzip kann durch geeignete Transformation magnetischer Kräfte für kleine Geschwindigkeiten wiederhergestellt werden (Siehe Übungsaufgabe 4). **3** 06.05.03

4 Eindimensionale Bewegung

Die Bewegungsgleichungen (3.2) sind Differentialgleichungen. Gesucht sind, z.B. bei gegebenen Anfangsbedingungen, Lösungen in Form von Integralen: Integration der Bewegungsgleichungen. Im Allgemeinen ist dies nicht möglich. Es ist zu untersuchen unter welchen Bedingungen und gegebenenfalls mit welchen Mitteln derartige Lösungen, möglicherweise auch nur näherungsweise, gefunden werden können. Auch qualitative Diskussionen können nützlich sein.

Beispiele eindimensionaler Bewegung:

<u>Gegeben: Kraft als Funktion der Zeit.</u>

$$m\,\ddot{x}(t) = F(t) \qquad \text{mit} \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \tag{4.1}$$

$$\dot{x}(t) = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, F(t') \tag{4.2}$$

$$x(t) = x_0 + (t - t_0)\, v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t''\, F(t'') \tag{4.3}$$

<u>Gegeben: Potential als Funktion des Ortes.</u> (Anfangsbedingung wie oben)

$$F(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} V\Big(x(t)\Big) \tag{4.4}$$

Integration entsprechend (4.3) erfordert explizite Kenntnis der Lösung!

Energiesatz:

$$E = \tfrac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2(t) + V\Big(x(t)\Big) = \tfrac{1}{2}\, m\, v_0^2 + V(x_0) \tag{4.5}$$

$$\dot{x}(t) = \pm\sqrt{\tfrac{2}{m}\Big\{E - V\Big(x(t)\Big)\Big\}} \tag{4.6}$$

Differentialgleichung erster Ordnung, aber immer noch Kenntnis der Lösung notwendig.

Neue Fragestellung: Nach welcher Zeit $t(x, x_0)$ wird x erreicht?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, t(x, x_0) = \left.\frac{1}{\dot{x}(t)}\right|_{t=t(x,x_0)} = \pm\frac{1}{\sqrt{\tfrac{2}{m}\Big\{E - V(x)\Big\}}} \tag{4.7}$$

$$t(x, x_0) = t_0 \pm \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{\tfrac{2}{m}\Big\{E - V(x')\Big\}}} \tag{4.8}$$

Damit ist die Lösung in Form eines Integrals gefunden.

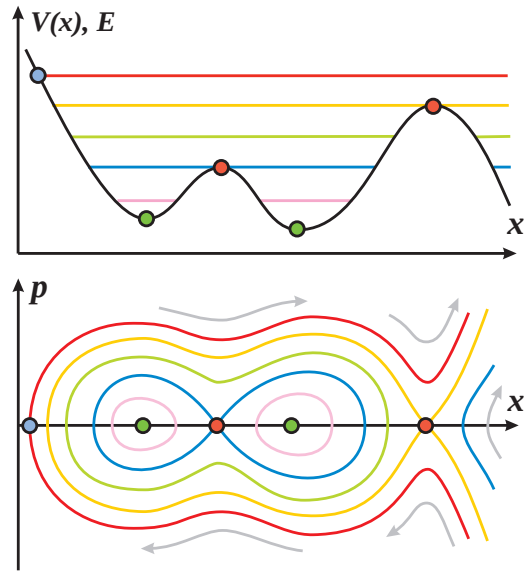
Vorzeichen $\pm$ aus Anfangsbedingung.

Vorsicht bei Bewegungen mit Umkehrpunkten!

Qualitative Diskussion:

Impuls:

$$p(t) = m\,\dot{x}(t) \tag{4.9}$$



Mit Energiesatz (4.6):

Trajektorie im "Phasenraum"

$$p(x) = \pm\sqrt{2m\Big\{E - V(x)\Big\}} \tag{4.10}$$

<u>Stationäre Punkte (Fixpunkte):</u>
$\overline{x}_n$ so daß

$$V'(\overline{x}_n) = 0 \qquad E = V(\overline{x}_n) \tag{4.11}$$

Stabile Fixpunkte: $V''(\overline{x}_n) > 0$
Instabile Fixpunkte: $V''(\overline{x}_n) < 0$

<u>Umkehrpunkte:</u> $x_0(E)$ so daß

$$V(x_a) = E \qquad \text{und} \qquad V'(x_a) \neq 0 \tag{4.12}$$

<u>Bewegung in der Nähe eines Umkehrpunktes:</u>

Es sei $V(x_0) = E$ und $V'(x_0) < 0$, sowie $x(t_0) = x_0$.
Für kleine Abstände $x - x_0$:

$$V(x) \approx E - |V'(x_0)|\,(x - x_0) + \cdots \tag{4.13}$$

$$p(x) = \pm\sqrt{2\,m\,|V'(x_0)|\,(x - x_0)} \tag{4.14}$$

Mit (4.8)

$$t(x, x_0) = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{\frac{2}{m}\,|V'(x_0)|\,(x - x_0)}} = t_0 + \sqrt{\frac{2m}{|V'(x_0)|}\,(x - x_0)} \tag{4.15}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{|V'(x_0)|}{2m}\,(t - t_0)^2 + \cdots \tag{4.16}$$

<u>Bewegung in der Nähe eines stabilen Fixpunktes:</u>

$V'(\overline{x}) = 0$; $V''(\overline{x}) > 0$. Es sei $E = V(\overline{x}) + \epsilon$:

$$p^2(x) + mV''(\overline{x})\,(x - \overline{x})^2 = 2\,m\epsilon \tag{4.17}$$

Die Trajektorien in der Nähe eines stabilen Fixpunktes sind Ellipsen.

Kraft für $x - \overline{x} \to 0$

$$K(x) = -V''(\overline{x})\,(x - \overline{x}) \tag{4.18}$$

Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x}(t) = -V''(\overline{x})\,\Big(x(t) - \overline{x}\Big) \tag{4.19}$$

Lösung: Harmonischer Oszillator

$$x(t) = \overline{x} + a\,\sin(\omega t + \alpha) \qquad\qquad p(t) = m\,\omega\,a\,\cos(\omega t + \alpha) \tag{4.20}$$

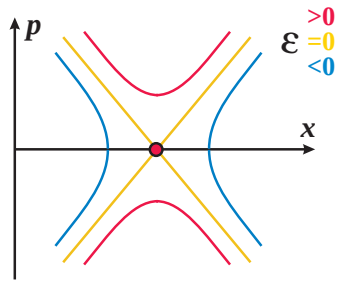
mit

$$\omega = \sqrt{\tfrac{1}{m} V''(\overline{x})} \qquad\qquad E = V(\overline{x}) + \tfrac{1}{2}\,m\,\omega^2\,a^2 \tag{4.21}$$

<u>Bewegung in der Nähe eines instabilen Fixpunktes:</u>

$V'(\overline{x}) = 0; \quad V''(\overline{x}) < 0; \quad E = V(\overline{x}) + \epsilon$:

$$p^2(x) - m\,|V''(\overline{x})|\,(x - \overline{x})^2 = 2\,m\epsilon \tag{4.22}$$



Die Trajektorien in der Nähe eines stabilen Fixpunktes sind Hyperbeln.

Lösung von (4.19) für $\epsilon \gtrless 0$:

$$x(t) = \overline{x} + a\,\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\Big(\gamma(t - t_0)\Big) \qquad\qquad p(t) = m\,\omega\,a\,\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\Big(\gamma(t - t_0)\Big) \tag{4.23}$$

mit

$$\gamma = \sqrt{\tfrac{1}{m}\,|V''(\overline{x})|} \tag{4.24}$$

Lösung für $\epsilon = 0$:

$$x(t) = \overline{x} + a\,\mathrm{e}^{\pm\gamma\,t} \qquad\qquad p(t) = \pm m\,\gamma\,a\,\mathrm{e}^{\pm\gamma\,t} \tag{4.25}$$

Anmerkung: Ein Fixpunkt (stabil oder instabil) kann in endlichen Zeiten nicht erreicht oder verlassen werden.

4 09.05.03

Reibungskräfte:

$$F(t) = -\mathrm{sign}\Big(v(t)\Big)\;R\Big(|v(t)|\Big) \tag{4.26}$$

Gleitende Reibung fester Körper (empirisch) $\qquad R\Big(|v(t)|\Big) = const.$

Viskose Reibung (kleine Reynoldszahlen) $\qquad R\Big(|v(t)|\Big) \sim |v(t)|$

Luftreibung (große Reynoldszahlen) $\qquad R\Big(|v(t)|\Big) \sim v(t)^2$

Falls keine weiteren Kräfte wirken, kann der "Bremsweg" berechnet werden:
Es sei $v(t = 0) = v_0$ und $v(t_0) = 0$:

$$\Delta x = \int_0^{t_0} \mathrm{d}t\,v(t) = -\int_0^{v_0} \frac{\mathrm{d}v}{\dot{v}}\,v = m\int_0^{v_0} \mathrm{d}v\,\frac{v}{R(v)} \tag{4.27}$$

5 Bewegung im Zentralpotential

Schwerpunkt- und Relativbewegung:

Zwei Körper mit Masse m_1 und m_2.
Gesamtmasse: $M = m_1 + m_2$.
Kraft und Potential (radialsymmetrisch)

$$\vec{F}_{1,2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\vec{\nabla}\, V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\vec{F}_{2,1}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \tag{5.1}$$

Newtonsche Bewegungsgleichungen:

$$m_1\, \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{1,2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \qquad m_2\, \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{2,1}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\vec{F}_{1,2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -m_1\, \ddot{\vec{r}}_1 \tag{5.2}$$

Schwerpunktskoordinate

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\Big(m_1\, \vec{r}_1 + m_2\, \vec{r}_2\Big) \qquad \ddot{\vec{R}} = 0 \qquad \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{U}\, t \tag{5.3}$$

<u>Impulssatz:</u>

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\, \dot{\vec{r}}_1 + m_2\, \dot{\vec{r}}_2 = M\, \dot{\vec{R}} \qquad \dot{\vec{P}} = 0 \tag{5.4}$$

Relativkoordinate

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{5.5}$$

Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\vec{r}} = \Big(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\Big)\, \vec{F}_{1,2}(\vec{r}) \tag{5.6}$$

Reduzierte Masse

$$m = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\, m_2}{M} \qquad m\, \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{1,2}(\vec{r}) \tag{5.7}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \qquad \vec{v}_{1,2} = \vec{U} \pm \frac{m_{2,1}}{M}\, \vec{v} \tag{5.8}$$

<u>Energiesatz:</u>

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2} m_1\, v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2\, v_2^2 + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \\ &= \tfrac{1}{2} M\, U^2 + \tfrac{1}{2} m\, v^2 + V(|\vec{r}|) \qquad \dot{E} = 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

<u>Drehimpulssatz:</u> (Drehimpuls bezogen auf Schwerpunkt)

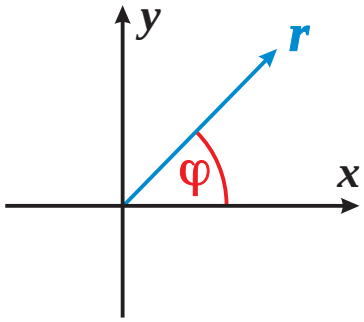
$$\begin{aligned} \vec{L} &= m_1\, (\vec{r}_1 - \vec{R}) \times (\vec{v}_1 - \vec{U}) + m_2\, (\vec{r}_2 - \vec{R}) \times (\vec{v}_2 - \vec{U}) \\ &= m\, \vec{r} \times \vec{v} \qquad \dot{\vec{L}} = 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Anmerkung: Relativbewegung: 6 Variable $\{\vec{r}, \vec{v}\}$; 4 Erhaltungssätze $\{E, \vec{L}\}$
2 Integrationen.

Bahnebene: Beachte: $\vec{L} \cdot \vec{r} = 0\,;\quad \vec{L} \cdot \vec{v} = 0\,.$
Die Bewegung verläuft in einer Ebene senkrecht zu $\vec{L}$.

Wahl des Koordinatensystems so daß $\vec{L} = (0, 0, L)$.

Polarkoordinaten:



$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\,\cos(\varphi(t)) \\ y(t) &= r(t)\,\sin(\varphi(t)) \\ \dot{x}(t) &= \dot{r}(t)\,\cos(\varphi(t)) - r(t)\,\sin(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t) \\ \dot{y}(t) &= \dot{r}(t)\,\sin(\varphi(t)) + r(t)\,\cos(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t) \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$v^2(t) = \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = \dot{r}(t)^2 + r(t)^2\dot{\varphi}(t)^2 \tag{5.12}$$

Energie:

$$E = \tfrac{1}{2}m\,\dot{r}(t)^2 + \tfrac{1}{2}m\,r(t)^2\dot{\varphi}(t)^2 + V\Big(r(t)\Big) \tag{5.13}$$

Drehimpuls:

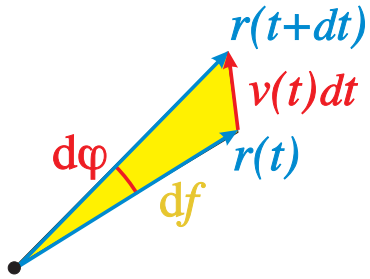
$$L = m\Big(x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)\Big) = m\,r^2(t)\,\dot{\varphi}(t) \tag{5.14}$$

Flächensatz (2. Keplersches Gesetz)

$\vec{r}(t)$ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

$$\mathrm{d}f = \tfrac{1}{2}\,\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\,m}\,L\,\mathrm{d}t \tag{5.15}$$

gilt für beliebige Zentralpotentiale.



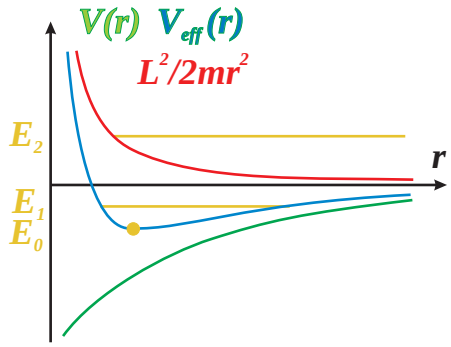
Radiale Bewegungsgleichung

Mit (5.13) und (5.14):

$$E = \tfrac{1}{2}\,m\,\dot{r}(t)^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r(t)^2} + V(r(t)) = \tfrac{1}{2}\,m\,\dot{r}(t)^2 + V_{\text{eff}}(r(t)) \tag{5.16}$$

Eindimensionale Bewegung in einem effektiven Potential mit "Zentrifugalpotential"

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} \tag{5.17}$$



$E_2 > 0$: Nicht periodische (offene) Bahn,
1 Umkehrpunkt r_0

$E_2 < 0$: Periodische Bahn
2 Umkehrpunkte r_0 und r_1

E_0: Kreisbahn r_0

Integration der Bewegungsgleichungen:

Kreisbahn:

$$E_0 = V_{\text{eff}}(r_0) \qquad\qquad V'_{\text{eff}}(r_0) = 0 \tag{5.18}$$

Periodische Bahn: $r(t_0) = r_0$

$$t(r) = t_0 + \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r') - \frac{L^2}{2mr'^2}\right)}} \tag{5.19}$$

Periode

$$\tau = 2\int_{r_0}^{r_1} \frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r') - \frac{L^2}{2mr'^2}\right)}} \tag{5.20}$$

Winkel: Mit $\varphi(t_0) = 0$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{L}{m\,r(t)^2} = \dot{r}(t)\,\frac{\mathrm{d}\varphi(r)}{\mathrm{d}r} \tag{5.21}$$

Mit (5.16) und $\varphi(t) \to \varphi(r(t))$

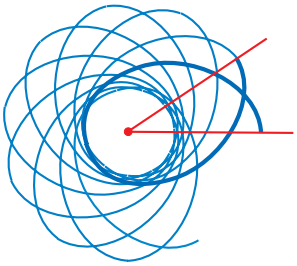
$$\varphi(r(t)) = \frac{L}{m}\int_{r_0}^{r(t)} \frac{\mathrm{d}r'}{\dot{r}'\,r'^2} = \frac{L}{m}\int_{r_0}^{r(t)} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r') - \frac{L^2}{2mr'^2}\right)}} \tag{5.22}$$

Bahnkurve $\varphi(r)$

Aphel-(Perihel-)drehung:

Winkel zwischen aufeinanderfolgenden ueren (inneren) Umkehrpunkten

$$\overline{\varphi} = \varphi(\tau) = \frac{2\,L}{m}\int_{r_0}^{r_1} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r') - \frac{L^2}{2mr'^2}\right)}} \tag{5.23}$$



Geschlossene Bahn:

$\overline{\varphi} = 2\,\pi\,\frac{n}{m}$ mit ganzzahligen n und m.

Im allgemeinen ist $\frac{\overline{\varphi}}{2\pi}$ irrational.

5 13.05.03

6 Das Keplerproblem

Als wichtiges Beispiel der Bewegung wird die Bewegung von Planeten oder Kometen im Sonnensystem behandelt. Dabei wird der Einfluß anderer Planeten, z.B. Jupiter bei der Bewegung der Erde, vernachlässigt. Das resultierende Zweikörperproblem ist integrabel.

<u>Gravitation</u>

$$K(r) = -\frac{\gamma\, m_1\, m_2}{r^2} \qquad V(r) = -\frac{\gamma\, m_1\, m_2}{r} = -\frac{\gamma\, m\, M}{r} \tag{6.1}$$

Beachte: Schwere Masse = träge Masse (Siehe allgemeine Relativitätstheorie)

<u>Umkehrpunkte:</u> Mit (4.12) und (5.17)

$$E + \frac{\gamma m M}{r_{0,1}} - \frac{L^2}{2\, m\, r_{0,1}^2} = 0 \tag{6.2}$$

$$r_{0,1} = -\frac{\gamma\, m\, M}{2\, E} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma\, m\, M}{2\, E}\right)^2 + \frac{L^2}{2\, m\, E}} \tag{6.3}$$

"Große Halbachse" $r_1 + r_0 = 2\, a\,;$ "Exzentrizität" ϵ

$$a = \frac{\gamma\, m\, M}{2\, |E|} \qquad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\, E\, L^2}{\gamma^2\, M^2\, m^3}} \tag{6.4}$$

<u>$\epsilon = 0$</u>	$E = E_0 = -\dfrac{\gamma^2\, M^2\, m^3}{2\, L^2}$	Kreisbahn	$r = \dfrac{L^2}{\gamma\, m^2\, M} = a$
<u>$0 < \epsilon < 1$</u>	$E_0 < E < 0$	gebundene Bahn	$r_{0,1} = (1 \mp \epsilon)\, a$
<u>$\epsilon = 1$</u>	$E = 0$	aperiodischer Grenzfall	$r_0 = \dfrac{L^2}{2\gamma\, m^2\, M}$
<u>$\epsilon > 1$</u>	$E > 0$	offene Bahn	$r_0 = (\epsilon - 1)\, a$

<u>Bahnkurve:</u> $\varphi(r)$ mit $\varphi(r_0) = 0$. Mit (5.22)

$$\varphi(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^{\,2}\sqrt{\frac{2m}{L^2}\left(E + \frac{\gamma m M}{r'} - \frac{L^2}{2mr'^2}\right)}} \tag{6.5}$$

Variablensubstitution: $x = \frac{a}{r'}$ $\quad \mathrm{d}x = -\frac{a}{r'^2}\mathrm{d}r'$

$$\varphi(r) = \int_{a/r}^{a/r_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon^2-1} + \frac{2x}{|\epsilon^2-1|} - x^2}} = \int_{a/r}^{a/r_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{(\epsilon^2-1)^2} - \left(x - \frac{1}{|\epsilon^2-1|}\right)^2}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{|\epsilon^2 - 1|\, x - 1}{\epsilon}\right)\Bigg|_{a/r}^{a/r_0} \tag{6.6}$$

$$x_0 = \frac{a}{r_0} = \frac{1}{|\epsilon - 1|} \quad \text{und}$$

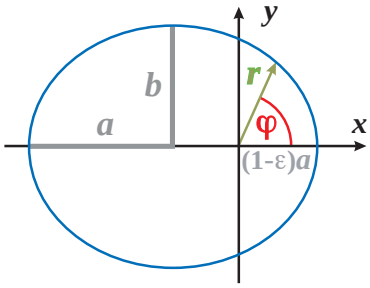
$$\arcsin\left(\frac{|\epsilon^2 - 1|\, x_0 - 1}{\epsilon}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \tag{6.7}$$

Mit $y = \sin(x)$ für $x = \arcsin(y)$

$$\frac{|\epsilon^2 - 1|\frac{a}{r} - 1}{\epsilon} = -\sin\left(\varphi(r) - \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\varphi(r)\right) \tag{6.8}$$

Aufgelöst nach $r(\varphi)$:

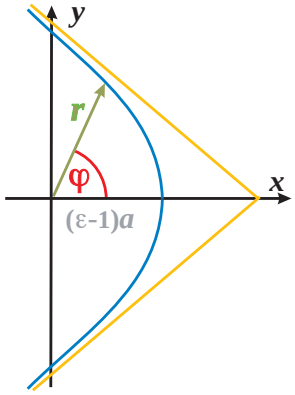
$$r(\varphi) = a\,\frac{|\epsilon^2 - 1|}{1 + \epsilon\,\cos(\varphi)} \tag{6.9}$$



Mit $x = r(\varphi)\,\cos(\varphi)\,,\quad y = r(\varphi)\,\sin(\varphi)$:

und $\quad b = \sqrt{|1 - \epsilon^2|}\,a \quad$ und $\quad E \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \end{matrix}$

$$\left(x \pm \epsilon\, a\right)^2 \pm \frac{a^2}{b^2}\, y^2 = a^2 \tag{6.10}$$



1. Keplersches Gesetz:

Für $E < 0$: $\epsilon < 1$; Bahnkurve ist Ellipse mit Halbachse a und b und Brennpunkt $r = 0$.

Für $E > 0$: $\epsilon > 1$; Bahnkurve ist Hyperbel mit Brennpunkt $r = 0$ und Öffnungswinkel $\pm\overline{\varphi}$ mit $\cos(\overline{\varphi}) = 1/\epsilon$.

Für $E = 0$: $\epsilon = 1$; Bahnkurve ist Parabel.

Typische Planetenbahnen: $E \approx E_0 \quad \epsilon \ll 1$, typische Kometenbahn $E \approx 0 \quad \epsilon \approx 1$, periodische Kometen $E < 0$, aperiodische Kometen $E \geq 0$.

3. Keplersches Gesetz

Umlaufperiode für Ellipsenbahn: Fläche der Ellipse

$$A = a\,b\,\pi = a^2\,\sqrt{1 - \epsilon^2}\,\pi \tag{6.11}$$

Flächensatz (5.15) integriert über eine Periode

$$A = \int_0^\tau \frac{L}{2\,m}\mathrm{d}t = \frac{L}{2\,m}\,\tau \tag{6.12}$$

Drehimpuls, berechnet aus (6.4):

$$\frac{L}{m} = \sqrt{a\,M\,\gamma\,(1 - \epsilon^2)} \tag{6.13}$$

Periode

$$\tau = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\gamma M}}\,a^{3/2} \tag{6.14}$$

Beachte: Die Umlaufperiode hängt nicht von der reduzierten Masse ab.

Lenzscher Vektor:

Die Keplerbahn für $E < 0$ ist periodisch, i.e. es tritt keine Periheldrehung auf, dies ist ein Hinweis auf die Existenz einer Erhaltungsgröße. Eine derartige Größe ist der Lenzsche Vektor (Laplace, Runge, Lenz)

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} + m\,V(r)\,\vec{r} \tag{6.15}$$

Mit $\dot{\vec{p}} = -\frac{1}{r}V'(r)\vec{r}, \quad m\,\dot{\vec{r}} = \vec{p}, \quad m\,\dot{r} = \frac{1}{r}(\vec{r}\cdot\vec{p})$ und $\vec{r}\times(\vec{r}\times\vec{p}) = (\vec{r}\cdot\vec{p})\,\vec{r} - (\vec{r}\cdot\vec{r})\,\vec{p}$

$$\dot{\vec{A}} = -\frac{1}{r}V'(r)\,\vec{r}\times\vec{L} + V(r)\,\vec{p} + \frac{1}{r}V'(r)\,(\vec{r}\cdot\vec{p})\,\vec{r} = \Big\{rV'(r) + V(r)\Big\}\,\vec{p} \tag{6.16}$$

Damit ist $\dot{\vec{A}} = 0$ für $V(r) \sim 1/r$.

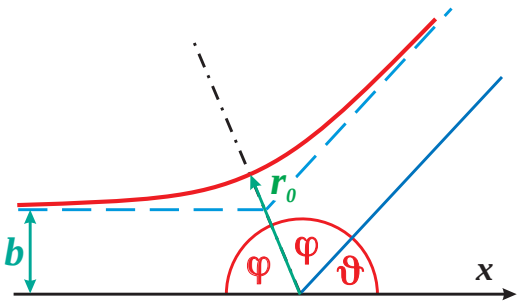
$\vec{A}$ zeigt in Richtung der großen Halbachse, wie man speziell für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ sieht, da für diese Werte $\vec{p}\cdot\vec{r} = 0$ ist und damit $\vec{A} \sim \vec{r}$ ist.

6 16.05.03

7 Streuung an einem Zentralpotential

Zunächst wird die Streuung an einem festen radialsymmetrischen Potential behandelt. Dies kann auch als Streuung von zwei Teilchen im Schwerpunktsystem, interpretiert werden. Später werden die Resultate ins Laborsystem umgerechnet, wobei angenommen wird, daß eines der Teilchen (Target) vor dem Stoß in Ruhe ist.

Streuung im Schwerpunktsystem, b.z.w. an einem festen Potential:



Potential $V(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

Stoßparameter b

Streuwinkel $\vartheta = \pi - 2\,\varphi$

Asymptotische Bahn für $t \to -\infty$:

$$\vec{r}(t) \to \vec{b} + \vec{v}_0\, t \qquad (7.1)$$

Energie

$$E = \tfrac{1}{2}\, m\, v_0^2$$

Drehimpuls

$$L(b) = m\, v_0\, b \qquad (7.2)$$

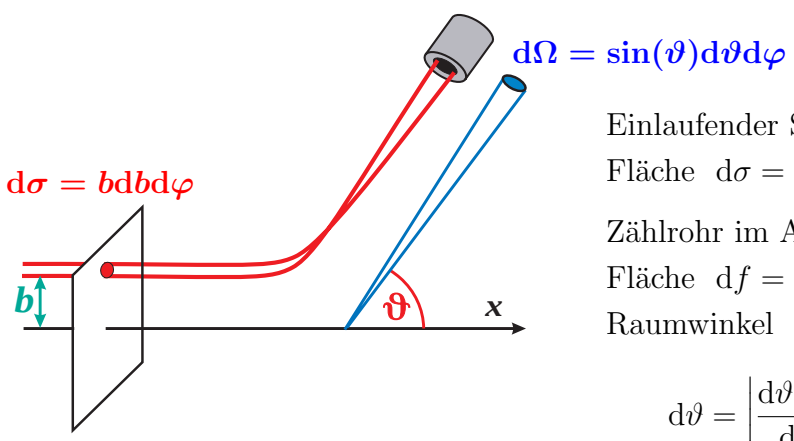
Umkehrpunkt:

$$E = V(r_0) + \frac{L(b)^2}{2\,m\,r_0^2} = V(r_0) + \frac{b^2}{r_0^2}\,E \qquad \Rightarrow \qquad r_0 = r_0(b) \qquad (7.3)$$

Streuwinkel als Funktion des Stoßparameters, mit (5.22):

$$\vartheta(b) = \pi - 2\int_{r_0(b)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2m}{L(b)^2}\left(E - V(r) - \frac{L(b)^2}{2m\,r^2}\right)}} \qquad (7.4)$$

<u>Differentieller Wirkungsquerschnitt:</u>



Einlaufender Strahl:

Fläche $\mathrm{d}\sigma = b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varphi$

Zählrohr im Abstand R

Fläche $\mathrm{d}f = R^2\,\mathrm{d}\Omega$

Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega = \sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

$$\mathrm{d}\vartheta = \left|\frac{\mathrm{d}\vartheta(b)}{\mathrm{d}b}\right|\mathrm{d}b \qquad (7.5)$$

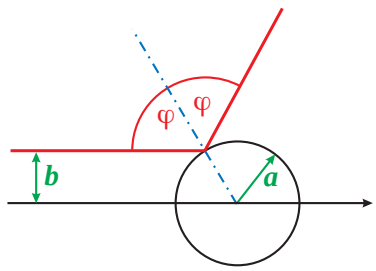
Zahl der gemessenen Teilchen $\mathrm{d}N_{\text{aus}} \sim \mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t$

Einlaufende Teilchen $\mathrm{d}N_{\text{ein}} = j\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t = j\,\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}N_{\text{aus}}$

Differentieller Wirkungsquerschnitt: Mit $b = b(\vartheta)$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \left| \frac{\mathrm{d}b(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} \right| \tag{7.6}$$

Streuung an einer harten Kugel:



Radius der Kugel a

$\sin(\varphi) = b/a \qquad \vartheta = \pi - 2\varphi$

$b(\vartheta) = \sin(\frac{1}{2}(\pi - \vartheta))\, a = \cos(\frac{1}{2}\vartheta)\, a$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \tfrac{1}{2}\, a^2\, \frac{\cos(\frac{1}{2}\vartheta)\, \sin(\frac{1}{2}\vartheta)}{\sin(\vartheta)} = \tfrac{1}{4}\, a^2 \tag{7.7}$$

Lambertsches Gesetz: Eine diffus reflektierende Oberflche erscheint unter allen Winkeln gleich hell.

Totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = a^2\, \pi \qquad \text{(für harte Kugel)} \tag{7.8}$$

Anmerkung: Quantenmechanisch: $\sigma_{tot} = 4\, a^2\, \pi$ für niedere Energien, $\sigma_{tot} = a^2\, \pi$ für hohe Energien.

Coulomb Streuung (Rutherford Streuung):

Z.B. Streuung von α-Teilchen an Kernen, Ladung Z_1 und Z_2. Potential

$$V(r) = \frac{Z_1\, Z_2\, e^2}{r} \tag{7.9}$$

Siehe Keplerproblem mit $\gamma\, m\, M \;\Rightarrow\; -Z_1\, Z_2\, e^2$.

Drehimpuls: $L = m\, v_0\, b$; Energie: $E = \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$; $\quad L^2 = 2\, m\, E\, b^2$

Mit (6.4)

$$a = \frac{Z_1\, Z_2\, e^2}{2\, E} \qquad\qquad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \tag{7.10}$$

Den Winkel φ erhält man aus (6.9) mit $r(\varphi) \to \infty$

$$\cos(\varphi) = \cos\left(\tfrac{1}{2}(\pi - \vartheta)\right) = \sin(\tfrac{1}{2}\vartheta) = \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} \tag{7.11}$$

Damit ist

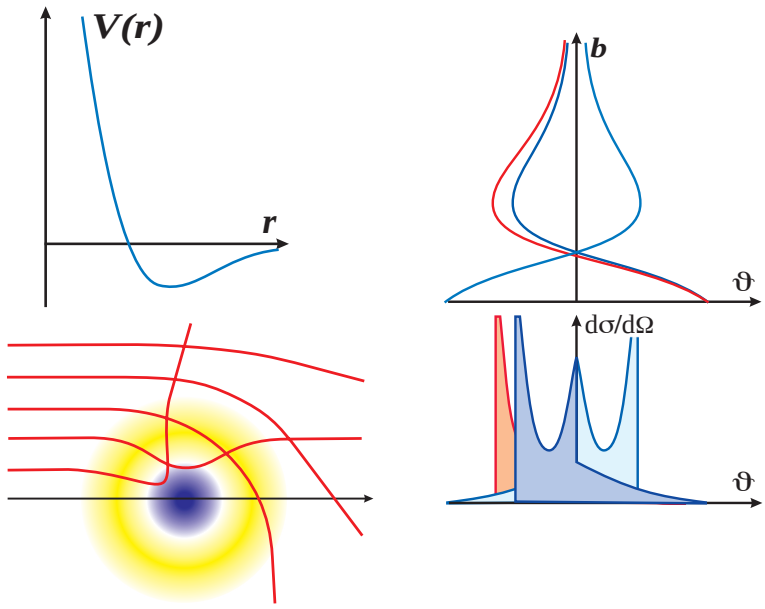
$$b = a\, \cot(\tfrac{1}{2}\vartheta) \qquad\qquad \left| \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\vartheta} \right| = \frac{a}{2\, \sin(\frac{1}{2}\vartheta)^2} \tag{7.12}$$

Mit (7.6): Rutherford-Streuquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{a^2}{4\, \sin(\frac{1}{2}\vartheta)^4} \tag{7.13}$$

Anmerkung: Eine quantenmechanische Rechnung liefert das gleiche Resultat.

Regenbogenstreuung

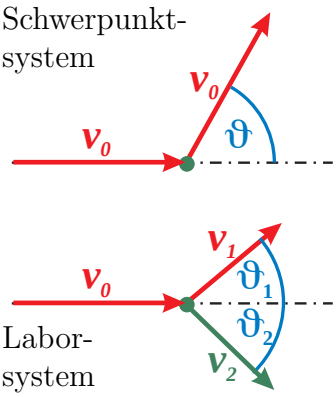


Für nicht monotone Potentiale $V(r)$ ist $\vartheta(b)$ ebenfalls nicht monoton. Dies führt zu Singularitäten im Wirkungsquerschnitt bei Winkeln $\vartheta_c(E)$, die von der Energie abhängen. Dies wird als "Regenbogenstreuung" bezeichnet.

7 20.05.03

Transformation aufs Laborsystem:

Schwerpunktsystem



Laborsystem

Transformation der Geschwindigkeiten:

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{M}\,\vec{v} + \vec{U} \qquad \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{M}\,\vec{v} + \vec{U} \tag{7.14}$$

Vor dem Stoß:

$$\vec{v} = \Big(v_0, 0, 0\Big) \qquad \vec{U} = \Big(\tfrac{m_1}{M}\,v_0, 0, 0\Big)$$

$$\vec{v}_1 = \Big(v_0, 0, 0\Big) \qquad \vec{v}_2 = \Big(0, 0, 0\Big) \tag{7.15}$$

Nach dem Stoß:

$$\vec{v} = \Big(v_0\cos(\vartheta), v_0\sin(\vartheta), 0\Big) \qquad \vec{U} = \Big(\tfrac{m_1}{M}v_0, 0, 0\Big) \tag{7.16}$$

$$\vec{v}_1 = \Big(v_1\cos(\vartheta_1), v_1\sin(\vartheta_1), 0\Big) = \Big(\tfrac{m_2}{M}v_0\cos(\vartheta) + \tfrac{m_1}{M}v_0, \tfrac{m_2}{M}v_0\sin(\vartheta), 0\Big)$$

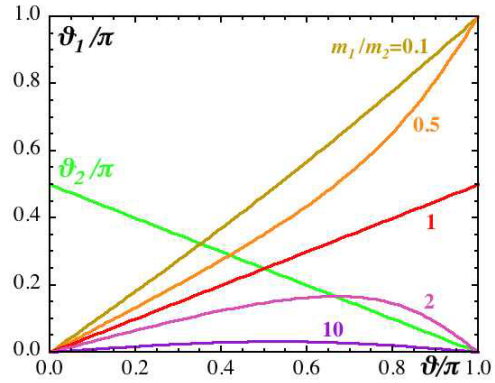
$$\vec{v}_2 = \Big(v_2\cos(\vartheta_2), -v_2\sin(\vartheta_2), 0\Big) = \Big(-\tfrac{m_1}{M}v_0\cos(\vartheta) + \tfrac{m_1}{M}v_0, -\tfrac{m_1}{M}v_0\sin(\vartheta), 0\Big) \tag{7.17}$$

Vergleich:

$$\tan(\vartheta_1) = \frac{\sin(\vartheta)}{\frac{m_1}{m_2} + \cos(\vartheta)}$$

$$\tan(\vartheta_2) = \frac{\sin(\vartheta)}{1 - \cos(\vartheta)} = \tan(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\vartheta}{2})$$

$$\vartheta_2 = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\vartheta \tag{7.18}$$



Anmerkung: Schwere Teilchen (α-Teilchen) werden bei Durchgang durch Materie von Elektronen wegen $m_\alpha \gg m_{\rm el}$ kaum gestreut.

Geschwindigkeit:

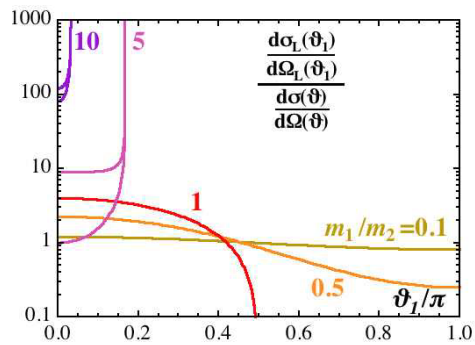
$$v_2 = \frac{m_1}{M}\, v_0 \sqrt{\Big(1-\cos(\vartheta)\Big)^2 + \sin(\vartheta)^2} = \frac{2m_1}{M}\, \cos(\vartheta_2)\, v_0 \tag{7.19}$$

Übertragene Energie

$$E_2 = \tfrac{1}{2}\, m_2\, v_2^2 = \frac{4\,m}{M}\, \cos(\vartheta_2)^2\, E_0 \tag{7.20}$$

<u>Wirkungsquerschnitt im Laborsystem:</u> $\vartheta = \vartheta(\vartheta_1)$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma_L^{(1)}(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\Omega_L^{(1)}} &= \frac{b(\vartheta_1)}{\sin(\vartheta_1)} \left|\frac{\mathrm{d}b(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\vartheta_1}\right| \qquad (7.21)\\
&= \frac{b(\vartheta_1)}{\sin(\vartheta_1)} \left|\frac{\mathrm{d}\vartheta(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\vartheta_1}\right| \left|\frac{\mathrm{d}b(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}\right| \\
&= \frac{\sin(\vartheta(\vartheta_1))}{\sin(\vartheta_1)} \left|\frac{\mathrm{d}\vartheta(\vartheta_1)}{\mathrm{d}\vartheta_1}\right| \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta(\vartheta_1))}{\mathrm{d}\Omega}
\end{aligned}$$



8 Verallgemeinerte Koordinaten, Lagrangegleichungen

In den folgenden Abschnitten wird der formale Aufbau der klassischen Mechanik weiter entwickelt. Dafür gibt es mehrere Motivationen.

Zunächst untersuchen wir Systeme mit Zwangsbedingungen, beispielsweise einen Wagen einer Achterbahn, der, durch Schienen geführt, aber letztlich durch die Schwerkraft angetrieben, beschleunigt oder abgebremst wird. Im Rahmen der Newtonschen Formulierung müßten wir zur Berechnung der Bewegung alle Kräfte kennen, auch die, die von der Schiene auf den Wagen ausgeübt werden, obwohl die Bahnkurve ja bereits durch den Verlauf der Schiene festgelegt ist, und nur noch die Geschwindigkeit entlang der Schiene zu bestimmen ist.

Die zur Vereinfachung derartiger Probleme notwendiger Überlegungen werden es auch gestatten allgemeinere z.B. krummlinige Koordinatensysteme zu verwenden, beispielsweise Kugelkoordinaten für Systeme mit sphärischer Symmetrie.

Schließlich werden Variation- oder Extremalprinzipien entwickelt, die den ursprünglichen Newtonschen Gleichungen equivalent sind, aber möglicherweise einfacher zu handhaben sind. Dies gilt insbesondere für nichtintegrable "chaotische" mechanische Systeme. Derartige Variationsprinzipien spielen aber auch in der Quantenmechanik oder in klassischen oder quantenmechanischen Feldtheorien eine große Rolle.

Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten:

Verallgemeinerte Koordinaten:

N Teilchen in einem 3-dimensionalen Raum können durch $3N$ kartesische Koordinaten $\{x_1(t), \cdots, x_i(t), \cdots, x_{3N}(t)\}$ beschrieben werden, alternativ durch verallgemeinerte Koordinaten $\{q_1(t), \cdots, q_n(t), \cdots, q_K(t)\}$. Falls keine Zwangsbedingungen existieren ist $K = 3N$. Es wird vorausgesetzt, daß sich die kartesischen Koordinaten durch die verallgemeinerten Koordinaten ausdrücken lassen, also

$$x_i = x_i(q_1, \cdots, q_n, \cdots, q_K; t) \tag{8.1}$$

Dabei sei eine explizite Zeitabhängigkeit erlaubt.
Beispiel: $\{x_i\}$: kartesische Koordinaten in einem Inertialsystem,
$\{q_n\}$: Kugelkoordinaten $\{r, \vartheta, \varphi\}$ in einem rotierendem System.

Holonome Zwangsbedingungen:

L Zwangsbedingungen (Einschränkungen), die durch Gleichungen gegeben sind

$$f_\ell(x_1, \cdots, x_{3N}; t) = 0 \qquad \ell = 1 \cdots L \tag{8.2}$$

Beispiel: Bewegung auf einer Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ oder

Doppelpendel: $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R_1^2 = 0$ und $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - R_2^2 = 0$.

$K = 3N - L$ Freiheitsgrade (verallgemeinerte Koordinaten).

$x_i(q_1, \cdots, q_K; t)$ so daß $f_\ell(x_1, \cdots, x_{3N}; t) = 0$ für beliebige $q_1 \cdots q_K$. Durch die Zwangsbedingungen wird die Bewegung auf eine K-dimensionale "Manigfaltigkeit" $\mathcal{M}_K$ eingeschränkt (z.B. Oberfläche der Kugel mit Radius R).

Im folgendem wird vorausgesetzt, daß die Funktionen $x_i(\cdots)$ und $f_\ell(\cdots)$ stetig differenzierbar sind.

Nicht holonome Zwangsbedingungen:

Beispiel: Ungleichungen $f_\ell(x_1, \cdots, x_{3N}; t) \geq 0$; (Bewegung innerhalb einer Kugel, Pendel mit Faden, $\cdots$).

Beispiel: Geschwindigkeitsabhängige Zwangsbedingungen
$f_\ell(x_1, \cdots, x_{3N}; \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_{3N}; t) = 0$ (Rollende Bewegung, $\cdots$).

Für nicht holonome Zwangsbedingungen existieren keine allgemeine Verfahren, sie werden hier nicht weiter untersucht.

Skleronome Zwangsbedingungen:

Keine explizite Zeitabhängigkeit in den Zwangsbedingungen. Generalisierte Koordinaten können so gewählt werden, daß in den Relationen (8.1) ebenfalls keine explizite Zeitabhängigkeit auftritt.

Rheonome Zwangsbedingungen:

Explizite Zeitabhängigkeit in Zwangsbedingungen und Relationen (8.1).

Beispiel: Bewegung entlang einer bewegten Stange.

Tangential- und Normalvektoren:

Es ist zweckmäßig lokale kartesische Koordinatensysteme in jedem Punkt auf der durch (8.2) gegebenen Manigfaltigkeit $\mathcal{M}_K$ zu definieren.

Tangentialvektoren (Vektoren im $3N$-dimensionalen Raum):

$$\mathcal{T}_{n,i}(q_1, \cdots, q_K; t) = \frac{\partial x_i(q_1, \cdots, q_K; t)}{\partial q_n} \tag{8.3}$$

Bei infinitesimalen Bewegungen entlang der Tangentialvektoren wird die Manigfaltigkeit $\mathcal{M}_K$ nicht verlassen.

Beispiel Kugeloberfläche: die Tangentialvektoren spannen eine lokale Tangentalebene auf.

Die Tangentialvektoren sollen linear unabhängig sein: Die $3N \times K$ Matrix mit Elementen $\partial x_i(\cdots)/\partial q_n$ muß Rang K haben.

Normalvektoren:

$$\mathcal{N}_{\ell,i}(q_1, \cdots, q_K; t) = \frac{\partial f_\ell(x_1, \cdots, x_{3N}; t)}{\partial x_i} \tag{8.4}$$

Tangential- und Normalvektoren stehen senkrecht aufeinander

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{N}}_\ell \cdot \vec{\mathcal{T}}_n &= \sum_i \mathcal{N}_{\ell,i}(q_1, \cdots, q_K; t)\, \mathcal{T}_{n,i}(q_1, \cdots, q_K; t) = \sum_i \frac{\partial f_\ell(x)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(q)}{\partial q_n} \\ &= \frac{\partial f_\ell(x(q))}{\partial q_n} = 0 \end{aligned} \tag{8.5}$$

8 23.05.03

wegen $f_\ell(x(q)) = 0$. Dabei sind die $\vec{\mathcal{N}}$ und $\vec{\mathcal{T}}_n$ als Vektoren im $3N$-dimensionalen Raum zu verstehen.

Die Normalvektoren sollen linear unabhängig sein: Die $L \times 3N$ Matrix mit Elementen $\partial f_\ell(\cdots)/\partial x_i$ muß Rang L haben.

Man hat also K Tangentialvektoren und L Normalvektoren mit $K + L = 3N$. Diese Vektoren bilden zusammen eine vollständige Basis. Normal- und Tangentialvektoren sind im allgemeinen nicht auf 1 normiert. Die Tangentialvektoren müssen untereinander nicht orthogonal sein, ebensowenig wie die Normalvektoren. Wichtig ist nur, daß (8.5) gilt.

Zwangskräfte:

Newtonsche Bewegungsgleichungen:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i \tag{8.6}$$

Beachte: $3N$ Gleichungen, aufgrund der Zwangsbedingungen existieren aber nur K unabhängige Feiheitsgrade. Aufgabe: Herleitung von K unabhängigen Bewegungsgleichungen.

Wir beschränken uns zunächst auf skleronome (zeitunabhängige) Zwangsbedingungen.

Aufteilung der Kräfte in Tangential- und Normalkräfte ($\vec{F} = \{F_1, \cdots, F_{3N}\}$):

$$\vec{F} = \vec{F}_{\mathcal{T}} + \vec{F}_{\mathcal{N}} \qquad \text{so daß} \qquad \vec{F}_{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathcal{N}}_\ell = 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{F}_{\mathcal{N}} \cdot \vec{\mathcal{T}}_n = 0 \tag{8.7}$$

Geschwindigkeiten:

$$v_i = \dot{x}_i = \sum_n \frac{\partial x_i(q_1, \cdots, q_K)}{\partial q_n} \dot{q}_n = \sum_n \mathcal{T}_{n,i} \dot{q}_n \tag{8.8}$$

Arbeit, siehe (3.7):

$$\dot{A} = \vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot \vec{F}_{\mathcal{T}} \qquad \text{und} \qquad \vec{v} \cdot \vec{F}_{\mathcal{N}} = 0 \tag{8.9}$$

Die Zwangskräfte tragen nicht zur Arbeit bei.

d'Alembertsches Prinzip:

K Bewegungsgleichungen für $n = 1 \cdots K$:

$$\sum_i \left\{ m_i \ddot{x}_i - F_i \right\} \mathcal{T}_{n,i} = \sum_i \left\{ m_i \ddot{x}_i - F_i^{\mathcal{T}} \right\} \mathcal{T}_{n,i} = 0 \tag{8.10}$$

In diesen Bewegungsgleichungen treten die Zwangskräfte nicht mehr auf (d'Alembertsches Prinzip, in diesem Zusammenhang werden die Tangentialvektoren auch als virtuelle Verrückungen $\mathcal{T}_{n,i} = \delta x_i^{(n)}$ bezeichnet).

Das Ziel ist noch nicht erreicht, da die Tangentialkomponenten der Beschleunigungen, und nicht die Zeitableitungen der generalisierten Koordinaten explizit auftreten.

Verallgemeinerte Kräfte:

$$Q_n(t) = \sum_i F_i^{\mathcal{T}} \mathcal{T}_{n,i} = \vec{F}_{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathcal{T}}_n \qquad \sum_i m_i \ddot{x}_i \, \mathcal{T}_{n,i} = Q_n \tag{8.11}$$

Verallgemeinerte Geschwindigkeiten: $\dot{q}_n$

Mit $x_i = x_i(q_1, \cdots, q_K; t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_i(q_1(t), \cdots, q_K(t); t) = \sum_n \frac{\partial x_i}{\partial q_n}\,\dot{q}_n + \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ &= \sum_n \mathcal{T}_{n,i}\,\dot{q}_n + \frac{\partial x_i}{\partial t} = v_i(q_i, \cdots, q_K; \dot{q}_1, \cdots\, \dot{q}_K; t)\Big|_{q=q(t);\,\dot{q}=\dot{q}(t)}\end{aligned} \tag{8.12}$$

wobei die verallgemeinerten Koordinaten q_n und die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_n$ hier als unabhängige Variable angesehen werden.

Damit ist:

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_n} = \mathcal{T}_{n,i} = \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \tag{8.13}$$

Die linke Seite der Bewegungsgleichung (8.11) ist

$$\sum_i m_i\,\ddot{x}_i\,\mathcal{T}_{n,i} = \sum_i m_i\,\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\,\mathcal{T}_{n,i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i\,v_i\,\mathcal{T}_{n,i}\right) - \sum_i m_i v_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{T}_{n,i} \tag{8.14}$$

Die Tangentialvektoren hängen im allgemeinen vom gewählten Ort ($\{q_n\}$) ab, der selbst über die Bewegungsgleichungen von der Zeit abhängt. Die totale Zeitableitung ist

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathcal{T}_{n,i}(q_1(t), \cdots, q_K(t); t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial x_i(q_1(t), \cdots, q_K(t); t)}{\partial q_n(t)} \\ &= \sum_m \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n \partial q_m}\,\dot{q}_m + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n \partial t} = \frac{\partial v_i(q_1, \cdots, q_K; \dot{q}_1, \cdots\, \dot{q}_K; t)}{\partial q_n}\Bigg|_{q=q(t);\,\dot{q}=\dot{q}(t)}\end{aligned} \tag{8.15}$$

Damit erhält man für (8.14):

$$\sum_i m_i\,\ddot{x}_i\,\mathcal{T}_{n,i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i\,v_i\,\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_n}\right) - \sum_i m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_n} \tag{8.16}$$

und mit Hilfe der kinetischen Energie

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_i m_i\,v_i^2 = T(q_1, \cdots, q_K; \dot{q}_1, \cdots\, \dot{q}_K; t) \tag{8.17}$$

bekommt man die gewünschten Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten, die

Lagrangegleichungen 1. Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial T}{\partial q_n} = Q_n \tag{8.18}$$

9 27.05.03

Lagrangefunktion und Lagrangegleichungen:

Konservative Kräfte:

$$F_i = -\frac{\partial V(x_1, \cdots, x_{3N})}{\partial x_i} \qquad Q_n = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_n} = -\frac{\partial V}{\partial q_n} \tag{8.19}$$

Lagrangefunktion für konservative Kräfte:

$$L(q_1, \cdots, q_K; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_K; t) = T(q_1, \cdots, q_K; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_K; t) - V(q_1, \cdots, q_K; t) \tag{8.20}$$

Lagrangegleichungen 2. Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \tag{8.21}$$

Gilt auch für geschwindigkeitsabhängige Kräfte, falls ein Potential $U(q, \dot{q})$ existiert, so daß

$$Q_n = -\frac{\partial U}{\partial q_n} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_n} \qquad \text{mit} \qquad L = T - U \tag{8.22}$$

Elektromagnetische Kräfte:

Teilchen mit Ladung e in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ und einem magnetischen Feld $\vec{B}$ mit

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\Phi = -\vec{\nabla}\,\Phi \qquad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{8.23}$$

Potential:

$$U = e\,\Phi - \tfrac{e}{c}\,\vec{A}\cdot\vec{v} \tag{8.24}$$

Mit $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{v}) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

$$\vec{F} = e\left\{ -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\,\vec{v}\times\vec{B}\right\} \tag{8.25}$$

(Elektrostatisches Feld; induziertes elektrisches Feld; Lorentz-Kraft)

Reibungskräfte:

$$\vec{F}_i^{(\mathrm{diss})} = -\gamma_n |\vec{v}_i|^{n-1}\vec{v}_i \tag{8.26}$$

Gleitende Reibung fester Körper (empirisch):	n=0
Viskose Reibung (kleine Reynoldszahlen):	n=1
Luftreibung (große Reynoldszahlen):	n=2

Dissipationsfunktion ($\dot{q} \to v$)

$$R(\dot{q}) = \tfrac{1}{n+1}\,\gamma_n\,|\vec{v}_i|^{n+1} \tag{8.27}$$

Lagrangegleichungen mit Dissipationsfunktion:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_n} = 0 \tag{8.28}$$

Zwangskräfte:

Die Lagrangegleichungen enthalten nur die Tangentialkräfte, also keine Kräfte, die aufgrund der Zwangsbedingungen auftreten. Dies sind z.B. Kräfte, die auf eine Schiene ausgeübt werden. Trotzdem kann es wichtig sein, auch diese Kräfte zu kennen.

Wir beschränken uns auf die Untersuchung holonomer, skleronomer Zwangsbedingungen $x_i = x_i(q_1, \cdots, q_K)$, und nehmen an, daß alle Massen gleich sind $m_i = m$.

Newtonsche Bewegungsgleichung:

Kraft $\vec{F}$; Zwangskraft aufgrund von Zwangsbedingung $\vec{F}_Z$

$$m\,\ddot{x}_i = F_i + F_i^Z \tag{8.29}$$

$$\dot{x}_i = \sum_n \frac{\partial x_i}{\partial q_n}\,\dot{q}_n = \sum_n \mathcal{T}_{n,i}\,\dot{q}_n \qquad\qquad \ddot{x}_i = \sum_n \mathcal{T}_{n,i}\,\ddot{q}_n + \sum_{n,m} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n\,\partial q_m}\,\dot{q}_n\,\dot{q}_m \tag{8.30}$$

Projektion auf Normalenraum:

$$m \sum_i \ddot{x}_i\,\mathcal{N}_{\ell,i} = m \sum_{n,m} \Gamma^\ell_{n,m}\,\dot{q}_n\,\dot{q}_m = K_\ell + K_\ell^Z \tag{8.31}$$

mit

$$K_\ell := \sum_i F_i\,\mathcal{N}_{\ell,i} \qquad\qquad K_\ell^Z := \sum_i F_i^Z\,\mathcal{N}_{\ell,i} \tag{8.32}$$

und

$$\Gamma^\ell_{n,m} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{T}_{n,i}}{\partial q_m}\,\mathcal{N}_{\ell,i} = \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n\,\partial q_m}\,\mathcal{N}_{\ell,i} \tag{8.33}$$

Die Größen $\Gamma^\ell_{n,m} = \Gamma^\ell_{n,m}(q_1, \cdots, q_K)$ sind sogenannte Koeffizienten des Zusammenhangs und sind Eigenschaften der durch die Zwangsbedingungen definierten Manigfaltigkeit. Sie geben an, wie sich ein Tangentialvektor ändert, wenn man sich entlang der Manigfaltigkeit bewegt. Diese Änderung hat im allgemeinen Komponenten sowohl im Tangentialraum, wie auch im Normalenraum, letztere sind durch die $\Gamma^\ell_{n,m}$ beschrieben.

Die Zwangskräfte, speziell die Kräfte aufgrund der Zwangsbedingungen, sind durch (8.31) gegeben. Es ist zu beachten, daß sie für die hier betrachteten skleronomen Zwangsbedingungen quadratisch von den Geschwindigkeiten $\dot{q}_n$, aber nicht von den Beschleunigungen $\ddot{q}_n$ abhängen.

Scheinkräfte in einem beschleunigten Bezugssystem:

x_α: Kartesische Koordinaten in einem Inertialsystem

q_α: Kartesische Koordinaten in einem beschleunigten Bezugssystem

Transformation:

$$x_\alpha = x_\alpha(\vec{q}, t) = \sum_\beta A_{\alpha,\beta}(t)\,\Big(q_\beta + b_\beta(t)\Big) \tag{8.34}$$

mit

$$\sum_\gamma A_{\alpha,\gamma}(t)\,A_{\beta,\gamma}(t) = \sum_\gamma A_{\gamma,\alpha}(t)\,A_{\gamma,\beta}(t) = \delta_{\alpha,\beta} \tag{8.35}$$

und Rotationsgeschwindigkeitstensor $\underline{\Omega}(t)$

$$\dot{A}_{\alpha,\beta}(t) = \sum_\gamma A_{\alpha,\gamma}(t)\,\Omega_{\gamma,\beta}(t) \qquad\qquad \Omega_{\beta,\alpha}(t) = -\Omega_{\alpha,\beta}(t) \tag{8.36}$$

Geschwindigkeiten:

$$v_\alpha(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \sum_\beta A_{\alpha,\beta}(t)\left(\dot{q}_\beta + \dot{b}_\beta(t)\right) + \sum_\beta \dot{A}_{\alpha,\beta}(t)\left(q_\beta + b_\beta(t)\right)$$
$$= \sum_\beta A_{\alpha,\beta}(t)\left\{\dot{q}_\beta + \dot{b}_\beta(t) + \sum_\gamma \Omega_{\beta,\gamma}(t)\Big(q_\gamma + b_\gamma(t)\Big)\right\} \tag{8.37}$$

Lagrangefunktion (mit (8.35)):

$$L = \tfrac{1}{2}\, m \sum_\alpha \left\{\dot{q}_\alpha + \dot{b}_\alpha(t) + \sum_\beta \Omega_{\alpha,\beta}(t)\Big(q_\beta + b_\beta(t)\Big)\right\}^2 - V(\vec{q}) \tag{8.38}$$

Lagrangegleichungen (8.21):

$$m\,\ddot{q}_\alpha = -m\,\ddot{b}_\alpha(t) - \sum_\beta \dot{\Omega}_{\alpha,\beta}(t)\Big(q_\beta + b_\beta(t)\Big)$$
$$-2m\sum_\beta \Omega_{\alpha,\beta}(t)\Big(\dot{q}_\beta + \dot{b}_\beta(t)\Big) + m\sum_{\beta,\gamma}\Omega_{\alpha,\gamma}(t)\Omega_{\beta,\gamma}(t)\left(q_\beta + b_\beta(t)\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}V(\vec{q}) \tag{8.39}$$

Die auf der rechten Seite auftretenden Scheinkräfte (1. Zeile) haben ihre Ursache in einer Beschleunigung des Ursprungs ($\ddot{b}_\alpha(t)$) und ungleichmäßiger Rotation ($\dot{\Omega}_{\alpha,\beta}(t)$), die weiteren Beiträge (2. Zeile) sind Corioliskraft und Zentrifugalkraft.

10 30.05.03

Variationsrechnung, Hamiltonsches Prinzip:

Extremalprinzipien und Variationsrechnungen sind eines der wichtigsten Hilfsmittel der theoretischen Physik. Viele Theorien, Quantenmechanik, klassische und quantenmechanische Feldtheorien, Relativitätstheorie, Wärmelehre und statistische Physik, lassen sich als Extremalprinzipien formulieren.

Grundlagen der Variationsrechnung:

Betrachte stetig differenzierbare Funktionen $y(x)$ in einem Bereich $x_0 < x < x_1$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y(x_1) = y_1$. Als Funktional $I(y)$ bezeichnet man eine Zahl, deren Wert von der gewählten Funktion $y(x)$ abhängt, speziell

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x\, F\Big(y(x), y'(x); x\Big) \qquad \text{mit} \qquad y'(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \tag{8.40}$$

(Verallgemeinerungen auf mehrere Funktionen und mehrerer Variable sind ohne weiteres möglich)

Es sei $y(x) = \overline{y}(x) + \epsilon\,\eta(x)$ mit $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Als Variation $\delta I(\overline{y})$ bezeichnet man

$$\delta I(\overline{y}) = \lim_{\epsilon\to 0}\Big\{I(\overline{y} + \epsilon\,\eta) - I(\overline{y})\Big\} = \epsilon\,\frac{\mathrm{d}I(\overline{y} + \epsilon\,\eta)}{\mathrm{d}\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \tag{8.41}$$
$$= \epsilon\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{d}x\left\{\frac{\partial F(y,y')}{\partial y}\bigg|_{y=\overline{y}(x);\,y'=\overline{y}'(x)}\eta(x) + \frac{\partial F(y,y')}{\partial y'}\bigg|_{y=\overline{y}(x);\,y'=\overline{y}'(x)}\frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}\right\}$$

Im zweiten Term des Integrals kann man partiell integrieren, wobei wegen $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ keine Beiträge von den Integrationsgrenzen auftreten:

$$\delta I(\overline{y}) = \epsilon \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x\, \eta(x) \left\{ \frac{\partial F(y,y')}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} \right\}_{y=\overline{y}(x);\, y'=\overline{y}'(x)} \tag{8.42}$$

Die Forderung (Extremalprinzip), daß $\frac{1}{\epsilon}\delta I(\overline{y}) = 0$ für beliebige $\eta(x)$ sein soll, liefert die sogenannte Eulerschen Differentialgleichung der Variationsrechnung

$$\frac{\partial F(y,y')}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} = 0 \tag{8.43}$$

Anmerkung: Bei der partiellen Differentiation ist y' als unabhängige Variable betrachtet, bei der totalen Ableitung $\mathrm{d}/\mathrm{d}x \cdots$ ist $y' = \mathrm{d}y(x)/\mathrm{d}x$.

Falls $F(y,y')$ nicht explizit von x abhängt kann man (8.43) umformen. Dazu betrachte

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(y,y') &= y' \frac{\partial F(y,y')}{\partial y} + y'' \frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} \\ &= y' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} + y'' \frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(y' \frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} \right) \end{aligned} \tag{8.44}$$

Daraus folgt

$$F(y,y') - y' \frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} = c \tag{8.45}$$

<u>Hamiltonschers Prinzip:</u>

Vergleich mit Lagrangegleichung (8.21):
$x \to t \quad y(x) \to q_n(t) \qquad F(y,y') \to L(q_1, \cdots, q_k; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_K; t) \qquad I(q)$: Wirkung

$$I(t_1, t_0; q_1, \cdots, q_K) = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, L(q_1, \cdots, q_k; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_K; t) \tag{8.46}$$

$$\delta I(t_1, t_0; \overline{q}_1, \cdots, \overline{q}_K) = 0 \tag{8.47}$$

<u>Eichfreiheit:</u>

$L(q, \dot{q}, t)$ ist nicht eindeutig: Es sei

$$\hat{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M(q,t) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_n \frac{\partial M(q,t)}{\partial q_n}\, \dot{q}_n + \frac{\partial M(q,t)}{\partial t} \tag{8.48}$$

dann ist

$$\delta \hat{I}(t_1, t_0; q) = \delta I(t_1, t_0; q) + \delta M\Big(q(t_1), t_1\Big) - \delta M\Big(q(t_0), t_0\Big) = \delta I(t_1, t_0; q) \tag{8.49}$$

wegen $\delta q_n(t_1) = \delta q_n(t_0) = 0$. Damit müssen die aus L und $\hat{L}$ hergeleiteten Bewegungsgleichungen identisch sein.

Beispiel: Potentiale für elektromagnetische Kräfte (8.23): $M \to e\, \Psi(\vec{r}, t)$

$$U \to e\, \Phi - \tfrac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + e \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Psi = e \left\{ \Phi + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\} - e\, \vec{v} \cdot \left\{ \tfrac{1}{c} \vec{A} - \vec{\nabla} \Psi \right\} \tag{8.50}$$

Dies gestattet es beispielsweise $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \mathrm{div}\vec{A}$ beliebig festzulegen.
Mit (8.22) und (8.25)

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\vec{\nabla}U + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\nabla}_v U \\
&= e\left\{ -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B} - \vec{\nabla}\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\Psi + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\nabla}\Psi \right\} \\
&= e\left\{ -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B} \right\} \qquad (8.51)
\end{aligned}$$

Damit hängt die elektromagnetische Kraft nicht von der Eichung ab.

11 3.06.03

9 Hamiltonformalismus

Der Hamiltonformalismus stellt eine alternative Formulierung der klassischen Mechanik dar. Hier werden verallgemeinerte Orts- und Impulskoordinaten als unabhängige Variable verwendet. Die resultierenden Bewegungsgleichungen sind Differentialgleichungen erster Ordnung, Im Vergleich zu den Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Lagrangetheorie, allerdings für den doppelten Satz von Variablen. Der Hamiltonformalismus erlaubt eine angemessene Behandlung von Symmetrien und Erhaltungsgrößen. Er stellt auch die Grundlage der Heisenbergschen Formulierung der Quantenmechanik dar.

Kanonische Impulse:

Es existiere eine Lagrangefunktion $L(q;\dot{q};t)$ mit $q=(q_1,\cdots,q_K)$; $\dot{q}=(\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_K)$.
Kanonische Impulse:

$$p_n = \frac{\partial L(q;\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_n} = p_n(q;\dot{q};t) \tag{9.1}$$

Beispiel: $L=\frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{x}_i^2 - V(x,t)$: $\quad p_i = m_i\dot{x}_i$.
Beispiel: Teilchen in einem elektromagnetischen Feld

$$L = \tfrac{1}{2}m\sum_\alpha \dot{x}_\alpha^2 - e\Phi(\vec{x}) - \tfrac{e}{c}\sum_\alpha A_\alpha(\vec{x})\dot{x}_\alpha \qquad\qquad p_\alpha = m\dot{x}_\alpha - \tfrac{e}{c}A_\alpha(\vec{x}) \tag{9.2}$$

Im allgemeinen $p_i \neq m_i\dot{x}_i$.
<u>Lagrangegeleichung:</u>

$$\dot{p}_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L(q;\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L(q;\dot{q};t)}{\partial q_n} \tag{9.3}$$

Anmerkung: Hier sind q_n und $\dot{q}_n$ als unabhängige Variable anzusehen. Es ist eine Formulierung gesucht, in der die verallgemeinerten Impulse unabhängige Variable sind und $\dot{q}_n = \dot{q}_n(p;q;t)$.
Gesucht $H(p;q;t)$ so daß

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H(p;q;t)}{\partial q_n} \tag{9.4}$$

Das Vorzeichen ist Konvention. Die partielle Differentiation ist bei festen Impulsen p zu verstehen.
<u>Legendre Transformation:</u>
Legendre Transformationen sind ein allgemeines Verfahren zum Wechsel von abhängigen und unabhängigen Variablen. Sie werden auch in der Thermodynamik und Statistischen Physik intensiv genutzt.
Gesucht ist $F(p;q;t)$ so daß

$$H(p;q;t) = -L(q;\dot{q}(p;q;t);t) + F(p;q;t) \tag{9.5}$$

und (siehe (9.3) und (9.4))

$$-\frac{\partial H(p;q;t)}{\partial q_n} = \left.\frac{\partial L(q;\dot{q};t)}{\partial q_n}\right|_{\dot{q}=\dot{q}(p;q;t)} \tag{9.6}$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial H(p;q;t)}{\partial q_n}\bigg|_p &= \frac{\partial L(q;\dot q;t)}{\partial q_n}\bigg|_{\dot q} - \frac{\partial F(p;q;t)}{\partial q_n}\bigg|_p \\
&\quad + \sum_m \frac{\partial L(q;\dot q;t)}{\partial \dot q_m}\bigg|_q \frac{\partial \dot q_m(p;q;t)}{\partial q_n}\bigg|_p \\
&= \frac{\partial L(q;\dot q;t)}{\partial q_n}\bigg|_{\dot q} - \frac{\partial F(p;q;t)}{\partial q_n}\bigg|_p + \sum_m p_m \frac{\partial \dot q_m(p;q;t)}{\partial q_n}\bigg|_p \qquad (9.7)
\end{aligned}
$$

(9.6) ist erfüllt für

$$
F(p;q;t) = \sum_m p_m\, \dot q_m(p;q;t) + c(p;t) \qquad (9.8)
$$

<u>Hamiltonfunktion</u>:
Für $c(p;t) = 0$:

$$
H(p;q;t) = \sum_m p_m\, \dot q_m(p;q;t) - L(q;\dot q(p;q;t);t) \qquad (9.9)
$$

Mit (9.3)

$$
\frac{\partial H(p;q;t)}{\partial p_n} = \dot q_m(p;q;t) + \sum_m \left\{ p_m - \frac{\partial L(q;\dot q;t)}{\partial \dot q_m} \right\} \frac{\partial \dot q_m(p;q;t)}{\partial p_n} = \dot q_m(p;q;t) \qquad (9.10)
$$

Hamiltonsche (kanonische) Bewegungsgleichungen:

Mit (9.4) und (9.10)

$$
\dot q_n = \frac{\partial H(p;q;t)}{\partial p_n} \qquad\qquad \dot p_n = -\frac{\partial H(p;q;t)}{\partial q_n} \qquad (9.11)
$$

Zeitabhängigkeit von H (mit (9.9)):

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(p;q;t) = \sum_n \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_n}\, \dot p_n + \frac{\partial H}{\partial q_n}\, \dot q_n \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H(p;q;t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q;\dot q;t)}{\partial t} \qquad (9.12)
$$

Falls keine explizite Zeitabhängigkeit in L oder H vorhanden ist, ist H Erhaltungsgröße (Energie)

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(p;q) = 0 \qquad (9.13)
$$

Lagrangefunktion, entwickelt nach Potenzen von $\dot q$:

$$
L(q;\dot q;t) = T(q;\dot q;t) - V(q;t) - U(q;\dot q;t) \qquad (9.14)
$$

dabei wurde das verallgemeinerte Potential in einen nur von q abhängigen Teil $V(q;t)$ und einen Rest $U(q;\dot q;t)$ der linear von $\dot q$ abhängt, also

$$
T(q;\dot q;t) = \sum_{n,m} T_{n,m}(q;t)\dot q_n \dot q_m \qquad\qquad U(q;\dot q;t) = \sum_n U_n(q;t)\dot q_n \qquad (9.15)
$$

Damit wird (9.9) mit (9.1)

$$
H = T + V = E \qquad (9.16)
$$

Dies ist die Energie, (3.14). Beachte: der linear von $\dot{q}$ abhängige Teil des verallgemeinerten Potentials trägt nicht zur Energie bei. Dieser Teil ist beispielsweise für die Lorentzkraft (8.25), $\vec{F}_L = \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$ zuständig. Diese trägt aber wegen $\vec{v} \cdot \vec{F}_L = 0$ nicht zur Arbeit (3.7) bei.

Bewegungsgleichungen für Observable:

Als Observable $A = A(p;q)$ bezeichnet man eine beobachtbare Größe, die eine Funktion von Orts- und Impulskoordinaten ist, beispielsweise den Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Die zeitliche Entwicklung ist mit (9.11)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A = \sum_n \left\{ \frac{\partial A}{\partial q_n}\,\dot{q}_n + \frac{\partial A}{\partial p_n}\,\dot{p}_n \right\} = \sum_n \left\{ \frac{\partial A}{\partial q_n}\,\frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n}\,\frac{\partial H}{\partial q_n} \right\} = \Big\{A, H\Big\} \tag{9.17}$$

Poisson-Klammern:

$$\Big\{A, B\Big\} = \sum_n \left\{ \frac{\partial A}{\partial q_n}\,\frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n}\,\frac{\partial B}{\partial q_n} \right\} = -\Big\{B, H\Big\} \tag{9.18}$$

Speziell mit (9.11):

$$\dot{q}_n = \Big\{q_n, H\Big\} \qquad\qquad \dot{p}_n = \Big\{p_n, H\Big\} \tag{9.19}$$

Anmerkung: Ersetzt man die Observablen und die Hamiltonfunktion durch entsprechende Operatoren (Matrizen) und die Poissonklammern durch Vertauschungsrelationen, erhält man die Heisenbergsche Formulierung der Quantenmechanik.

Hamiltonsches Prinzip:

Auch die kanonischen Bewegungsgleichungen lassen sich aus einem Extremalprinzip herleiten. Dazu betrachtet man das Funktional (Wirkung)

$$\begin{aligned} I(p;q) &= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \Big\{ \sum_n p_n \dot{q}_n - H(p;q;t) \Big\} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \Big\{ -\sum_n q_n \dot{p}_n - H(p;q;t) + \sum_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_n q_n) \Big\} \end{aligned} \tag{9.20}$$

Die Bedingung

$$\delta I(p;q) = 0 \qquad \text{mit} \quad \delta q_n(t_0) = \delta q_n(t_1) = 0 \tag{9.21}$$

liefert die kanonischen Gleichungen (9.11).

Auch hier kann man zu H Funktionen addieren, die durch totale Zeitableitungen gegeben sind, also

$$H(p;q;t) \to H(p;q;t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(p;q;t) \tag{9.22}$$

mit

$$\delta S(p(t_0);q(t_0);t_0) = \delta S(p(t_1);q(t_1);t_1) = 0 \tag{9.23}$$

12 6.06.03

Beispiel: Bewegung in einem Zentralpotential, Kugelkoordinaten:

$$x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \qquad y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \qquad z = r\cos(\vartheta) \tag{9.24}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{r}\sin(\vartheta)\cos(\varphi) + \dot{\vartheta}\, r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) - \dot{\varphi}\, r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\
\dot{y} &= \dot{r}\sin(\vartheta)\sin(\varphi) + \dot{\vartheta}\, r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) + \dot{\varphi}\, r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\
\dot{z} &= \dot{r}\cos(\vartheta) - \dot{\vartheta}\, r\sin(\vartheta)
\end{aligned} \tag{9.25}$$

Kinetische Energie:

$$T = \tfrac{1}{2}\, m\Big\{\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin(\vartheta)^2\dot{\varphi}^2\Big\} \tag{9.26}$$

Impulse, mit $L = T - V(r)$ und (9.1)

$$p_r = m\dot{r} \qquad p_\vartheta = m\, r^2\, \dot{\vartheta} \qquad p_\varphi = m\, r^2\, \sin(\vartheta)^2\dot{\varphi} = L_z \tag{9.27}$$

wobei L_z die z-Komponente des Drehimpulses ist.
Da H nicht von φ abhängt, gilt $\dot{L}_z = 0$ (Drehimpulssatz).
Bewegung in x-y-Ebene:
$\vartheta = \frac{1}{2}\pi \quad \sin(\vartheta) = 1$

$$H = \tfrac{1}{2m}\left\{p_r^2 + \frac{L_z^2}{r^2}\right\} + V(r) \tag{9.28}$$

Bewegungsgleichung für r

$$\dot{r} = \tfrac{1}{m}\, p_r \qquad \dot{p}_r = \frac{L_z^2}{2m\, r^3} - V'(r) \tag{9.29}$$

Bewegungsgleichung für φ:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial L_z} = \frac{L_z}{2m\, r^2} \qquad r^2\, \dot{\varphi} = \frac{L_z}{2m} \tag{9.30}$$

Die zweite Gleichung ist der Flächensatz (2. Keplersches Gesetz, (5.15)).

10 Kanonische Transformationen

Die Existenz von Symmetrien und Erhaltungsgrößen ist entscheidend für die Lösbarkeit eines mechanischen Problems, wie später gezeigt wird. Hängt die Hamiltonfunktion von einer Ortsvariablen q_n nicht ab, ist der zugehörige Impuls eine Erhaltungsgröße, (9.11). Im Allgemeinen ist dies aber nicht der Fall, auch wenn erhaltungsgrößen existieren. Durch Wahl geeigneter verallgemeinerter Koordinaten kann man jedoch versuchen dies zu erreichen. Zum Beispiel enthält die Hamiltonfunktion für die Bewegung eines Teilchens in einem Zentralpotential, formuliert in kartesischen Koordinaten, alle Ortsvariablen $\{q\} = (x, y, z)$, Formuliert in Polarkoordinaten aber nur noch r. Dementsprechend ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.

In der Lagrangeformulierung ist die Einfhrung verallgemeinerter Koordinaten $Q = Q(q, t)$ kein Problem. In der Hamiltonformulierung hat man jedoch die Möglichkeit verallgemeinerte Orts- und Impulsvariable $P = P(p; q; t)$ und $Q = Q(p; q; t)$ zu wählen, wobei jedoch Einschrnkungen existieren, wie gezeigt wird.

Gegeben sei $H = H(p; q; t)$ als Funktion der ursprünglichen Impulse und Koordinaten p_n und q_n. Gesucht sind neue Impulse und Koordinaten

$$P_l = P_l(p; q; t) \qquad\qquad Q_l = Q_l(p; q; t) \tag{10.1}$$

und eine neue Hamiltonfunktion

$$K = K(P; Q; t) \tag{10.2}$$

so daß auch in den neuen Variablen kanonische Gleichungen gelten

$$\dot{P}_l = -\frac{\partial K(P; Q; t)}{\partial Q_l} \qquad\qquad \dot{Q}_l = \frac{\partial K(P; Q; t)}{\partial P_l} \tag{10.3}$$

Keine explizite Zeitabhängigkeit:

Für $H = H(p; q)$, $P = P(p; q)$ und $Q = Q(p; q)$:

Energie:

$$E = H(p; q) = K(P(p; q); Q(p; q)) \tag{10.4}$$

Mit (9.17)

$$\begin{aligned}
\dot{P}_l &= \sum_n \left\{ \frac{\partial P_l}{\partial p_n}\,\dot{p}_n + \frac{\partial P_l}{\partial q_n}\,\dot{q}_n \right\} = \sum_n \left\{ -\frac{\partial P_l}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial q_n} + \frac{\partial P_l}{\partial q_n}\frac{\partial H}{\partial p_n} \right\} \\
&= \sum_k \sum_n \left\{ \frac{\partial K}{\partial Q_k}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_n}\frac{\partial P_l}{\partial q_n} - \frac{\partial Q_k}{\partial q_n}\frac{\partial P_l}{\partial p_n} \right) + \frac{\partial K}{\partial P_k}\left(\frac{\partial P_k}{\partial p_n}\frac{\partial P_l}{\partial q_n} - \frac{\partial P_k}{\partial q_n}\frac{\partial P_l}{\partial p_n} \right) \right\} \\
&= -\sum_k \left\{ \frac{\partial K}{\partial Q_k}\left\{ Q_k, P_l \right\} + \frac{\partial K}{\partial P_k}\left\{ P_k, P_l \right\} \right\}
\end{aligned} \tag{10.5}$$

und entsprechend

$$\dot{Q}_l = -\sum_k \left\{ \frac{\partial K}{\partial Q_k}\left\{ Q_k, Q_l \right\} + \frac{\partial K}{\partial P_k}\left\{ P_k, Q_l \right\} \right\} \tag{10.6}$$

Andererseits soll (10.3) gelten: also

$$\Big\{Q_k, P_l\Big\} = -\Big\{P_k, Q_l\Big\} = \delta_{k,l}; \qquad \Big\{Q_k, Q_l\Big\} = \Big\{P_k, P_l\Big\} = 0 \tag{10.7}$$

Verallgemeinerte Koordinaten, die diese Relationen erfüllen nennt man kanonische Koordinaten.

<u>Kanonische Invarianz der Poissonklammern:</u>
Es sei $A = A(P;Q)$ und $B = B(P;Q)$:

$$\begin{aligned}
\Big\{A, B\Big\}_{p,q} &= \sum_n \left\{ \frac{\partial A}{\partial q_n}\frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n}\frac{\partial B}{\partial q_n} \right\} \\
&= \sum_{k,l} \left\{ \frac{\partial A}{\partial Q_k}\frac{\partial B}{\partial Q_l}\Big\{Q_k, Q_l\Big\}_{p,q} + \frac{\partial A}{\partial P_k}\frac{\partial B}{\partial Q_l}\Big\{P_k, Q_l\Big\}_{p,q} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial A}{\partial Q_k}\frac{\partial B}{\partial P_l}\Big\{Q_k, P_l\Big\}_{p,q} + \frac{\partial A}{\partial P_k}\frac{\partial B}{\partial P_l}\Big\{P_k, P_l\Big\}_{p,q} \right\} \\
&= \sum_l \left\{ \frac{\partial A}{\partial Q_l}\frac{\partial B}{\partial P_l} - \frac{\partial A}{\partial P_l}\frac{\partial B}{\partial Q_l} \right\} = \Big\{A, B\Big\}_{P,Q}
\end{aligned} \tag{10.8}$$

Damit kann die Poissonklammer in jedem System kanonischer Koordinaten ausgewertet werden.

Explizite Zeitabhängigkeit: Erzeugende Funktion

Die Poissonklammernrelationen (10.7) und (10.4) gelten nur falls keine explizite Zeitabhängigkeit auftritt. Außerdem stellt (10.7) nur eine Bedingung an die Wahl der neuen Impulse P_l und Koordinaten Q_l dar, aber keine explizite Vorschrift diese zu konstruieren.

<u>Behauptung:</u> $P_l = P_l(p;q;t)$ und $Q_l = Q_l(p;q;t)$ sind kanonische Variable falls

$$\sum_n p_n \dot{q}_n - H = \sum_l P_l \dot{Q}_l - K + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F \tag{10.9}$$

gilt, wobei $F = F(q, Q, t)$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion ist, die sowohl die neuen Koordinaten, wie auch $K = K(P;Q;t)$ festlegt. F wird erzeugende Funktion genannt.

Setzt man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F = \sum_n \frac{\partial F}{\partial q_n}\dot{q}_n + \sum_l \frac{\partial F}{\partial q_l}\dot{Q}_l + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{10.10}$$

in (10.9) ein, und berücksichtigt man, daß dies für beliebige $\dot{q}_n$ und $\dot{Q}_l$ gelten soll, erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial q_n} = p_n \qquad \frac{\partial F}{\partial Q_l} = -P_l \qquad K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{10.11}$$

Dabei ist die erste Gleichung als implizite Gleichung für $Q_l = Q_l(p;q;t)$ aufzufassen, die weiteren Gleichungen liefern dann $P_l = P_l(p;q;t)$ und $K = K(P;Q;t)$.

Wir betrachten das Hamiltonsche Prinzip für (9.20) mit $\delta q_n(t_1) = \delta q_n(t_0) = 0$. Mit (10.9) ist

$$\delta I(p;q) = 0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \sum_l \left[\delta P_l \left\{ \dot{Q}_l - \frac{\partial K}{\partial P_l} \right\} - \delta Q_l \left\{ \dot{P}_l + \frac{\partial K}{\partial Q_l} \right\} \right]$$
$$+ \delta F(t_1) - \delta F(t_0) + \sum_l \left\{ P_l(t_1)\delta Q_l(t_1) - P_l(t_0)\delta Q_l(t_0) \right\} \qquad (10.12)$$

Beachtet man daß

$$\delta F(t_{0,1}) = \sum_n \frac{\partial F(t_{0,1})}{\partial q_n} \delta q_n(t_{0,1}) + \sum_l \frac{\partial F(t_{0,1})}{\partial Q_l} \delta Q_l(t_{0,1})$$
$$= -\sum_l P_l(t_{0,1})\delta Q_l(t_{0,1}) \qquad (10.13)$$

ist, wobei (10.11) und $\delta q_n(t_{0,1}) = 0$ genutzt wurde, sieht man daß nur das Integral in (10.11) übrigbleibt, und damit die kanonischen Gleichungen in der neuen Variablen mit der Hamiltonfunktion $K(P;Q;t)$ erfüllt sein müssen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die P_l und Q_l die kanonischen Poissonklammerrelationen erfüllen. Dazu untersucht man Bewegungsgleichungen vom typ (9.17), allerdings unter Berücksichtigung einer eventuellen expliziten Zeitabhängigkeit für $P_l(p;q;t)$ und $Q_l(p;q;t)$ und vergleicht das Resultat mit den kanonischen Gleichungen in den neuen Variablen mit Hamiltonfunktion $K(P;Q;t)$. Dies xeigt, daß die kanonische Poissonklammerrelationen erfüllt sind. Die Rechnung entspricht der in (10.5) und (10.6).

Ausgangspunkt für diese Rechnung war eine erzeugende Funktion $F = F(q;Q;t)$. Es gibt aber weitere Möglichkeiten, die durch Legendretransformation aus dieser hervorgehen, z.B.

$$G(q;P;t) = F(q;Q;t) + \sum_l P_l Q_l \qquad \frac{\partial G}{\partial q_n} = p_n \qquad \frac{\partial G}{\partial P_l} = Q_l \qquad (10.14)$$

oder weitere Funktionen der alten und neuen Variablen.

13 10.06.03

Infinitesimale kanonische Transformationen:

Als Spezialfall untersuchen wir infinitesimale kanonische Transformationen, bei denen sich alte und neue Variable nur infinitesimal unterscheiden. Derartige Transformationen werden wir später beispielsweise verwenden, um Zusammenhänge zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen aufzuzeigen (Noether Theorem).

Betrachte eine erzeugende Funktion vom Typ (10.14)

$$G(q;P) = \sum_n q_n P_n + \epsilon\, g(P;q) \qquad p_n = P_n + \epsilon \frac{\partial g}{\partial q_n} \qquad Q_n = q_n + \epsilon \frac{\partial g}{\partial P_n} \qquad (10.15)$$

Für $\epsilon \to 0$ kann man die neuen Koordinaten durch die alten ausdrücken und erhält mit $g = g(p;q)$

$$Q_n = q_n + \epsilon \frac{\partial g}{\partial p_n} \qquad P_n = p_n - \epsilon \frac{\partial g}{\partial q_n} \qquad (10.16)$$

Damit transformiert sich eine beliebige Funktion (Observable) wie

$$A(p;q) \to A(p;q) + \epsilon\Big\{A(p;q), g(p;q)\Big\} \tag{10.17}$$

Speziell für $g(p;q) = H(p;q;t)$ und $\epsilon = \mathrm{d}t$ sieht man, daß die Hamiltonfunktion als Erzeugende zeitlichen Entwicklung aufgefaßt werden kann. Dies ist Ausgangspunkt der Hamilton-Jacobi-Theorie, die wir aber im Rahmen der Vorlesung nicht weiter untersuchen werden.

Punkttransformationen:

In der Lagrangeschen Mechanik wurden nur sogenannte Punkttransformationen betrachtet, also Transformationen der Art

$$Q_l = \hat{Q}_l(q;t) \tag{10.18}$$

Als Erzeugende konstruiert man $G(q;P;t)$ aus (10.14)

$$\hat{Q}_l(q;t) = \frac{\partial G(q;P;t)}{\partial P_l} \qquad \text{mit} \qquad G(q;P;t) = \sum_l \hat{Q}_l(q;t)\, P_l \tag{10.19}$$

und damit ist

$$p_n = \sum_l \frac{\partial \hat{Q}_l(q;t)}{\partial q_n}\, P_l \qquad\qquad P_l = \sum_n \left(\frac{\partial \hat{Q}}{\partial q}\right)^{-1}_{l,n} p_n \tag{10.20}$$

und

$$K = H + \sum_l P_l \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}. \tag{10.21}$$

Fluß im Phasenraum, Liouvillescher Satz:

Die Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen kann als Bewegung eines Punktes im Phasenraum interpretiert werden. Der Phasenraum, auch Γ-Raum genannt, ist für ein System mit K Freiheitsgraden ein $2K$-dimensionaler Raum mit Koordinaten $(p_1, \cdots, p_K, q_1, \cdots, q_K)$. Die Bewegung wird also durch eine Trajektorie

$$\vec{x}_\Gamma(t) = \Big(p_1(t), \cdots, p_K(t), q_1(t), \cdots, q_K(t)\Big) = \Big(p(t); q(t)\Big) \tag{10.22}$$

dargestellt. Die Geschwindigkeit des Punktes ist

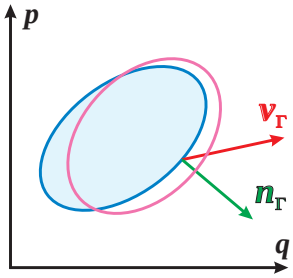
$$\begin{aligned} \vec{w}_\Gamma(t) &= \dot{\vec{x}}_\Gamma(t) = \Big(u_1(t), \cdots, u_K(t), v_1(t), \cdots, v_K(t)\Big) \\ &= \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}, \cdots, -\frac{\partial H}{\partial q_K}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial H}{\partial p_K}\right) \end{aligned} \tag{10.23}$$

Betrachtet man Punkte mit verschiedenen Anfangsbedingungen, kann man $\vec{v}_\Gamma$ als Geschwindigkeitsfeld im Γ-Raum auffassen. Dieses Feld entspricht einer inkompressiblen Strömung, also

$$\mathrm{Div}_\Gamma\, \vec{w}_\Gamma = \sum_n \left\{\frac{\partial u_n}{\partial p_n} + \frac{\partial v_n}{\partial q_n}\right\} = \sum_n \left\{-\frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_n} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial p_n}\right\} = 0 \tag{10.24}$$

Es mag angebracht sein, alle Systeme mit Anfangsbedingungen in einem Volumen $V_\Gamma(t_0)$ zusammen zu betrachten, beispielsweise wenn die Anfangsbedingungen nur mit begrenzter Genauigkeit bekannt sind, oder wenn man einen Teilchenstrahl mit einem gewissen Querschnitt und einer Winkeldivergenz betrachten will.

Das Volumen $V_\Gamma(t_0)$ sei durch eine geschlossene Fläche $S_\Gamma(t_0)$ im Γ-Raum begrenzt. Das betrachtete Volumen und seine Begrenzung strömt mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{w}_\Gamma$. Damit ist die Änderung des Volumens



$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\Gamma(t) &= \int_{S_\Gamma(t)} \mathrm{d}^{2K-1}s_\Gamma\, \vec{n}_\Gamma \cdot \vec{w}_\Gamma \\ &= \int_{V_\Gamma(t)} \mathrm{d}^{2K}x_\Gamma\, \mathrm{Div}_\Gamma\, \vec{w}_\Gamma = 0 \qquad (10.25)\end{aligned}$$

Dies ist der Liouvillesche Satz, er besagt, daß sich die Größe eines Teilvolumens im Phasenraum aufgrund der Bewegung nicht ändert. Diese Aussage gilt für jeden Satz kanonischer Variable.

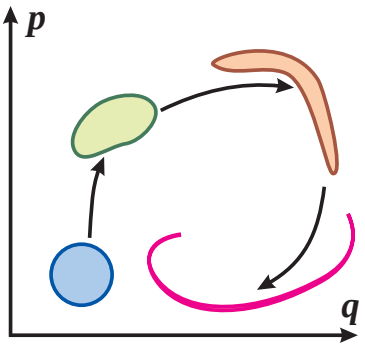
Es sei $\rho_\Gamma(\vec{x}_\Gamma, t)\Delta V_\Gamma(t)$ die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein betrachtetes System zur Zeit t in einem Phasenraumvolumen $\Delta V_\Gamma(t)$ in der Nähe von $\vec{x}_\Gamma(t)$ befindet. Diese Wahrscheinlichkeit ändert sich nicht, wenn das betrachtete Volumen ΔV_Γ in der Strömung mit schwimmt, also wenn (10.25) gilt. Die Größe $\rho_\Gamma(\vec{x}_\Gamma, t)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte im Γ-Raum, für die dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_\Gamma(\vec{x}_\Gamma, t) = \frac{\partial}{\partial t}\rho_\Gamma(\vec{x}_\Gamma, t) + \Big\{\rho_\Gamma(\vec{x}_\Gamma, t), H(t)\Big\} = 0 \qquad (10.26)$$

gilt. Diese "Liouville Gleichung" ist eine der grundlegenden Gleichungen der statistischen Physik.

Anmerkung:

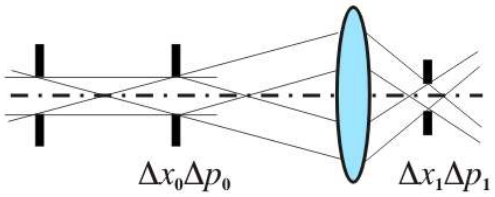
Der Liouvillesche Satz besagt, daß das Volumen ΔV_Γ eines Bereichs im Γ-Raum unter der Dynamik erhalten bleibt, nicht jedoch z.B. dessen größte lineare Ausdehnung. Ein exponentiell rasches Anwachsen der größten linearen Ausdehnung ist ein Charakteristikum chaotischer Systeme, wie später diskutiert wird.



Beispiel

Leuchtdichte: Intensität (Fluß) pro Fläche und Raumwinkel:

$$B = \frac{\Delta\Phi}{\Delta f\, \Delta\Omega} \qquad (10.27)$$



Mit $\Delta f = \Delta x^2$ und $\Delta\Omega \approx \Delta p^2/p^2$:

$B_1 = B_0$: Die Leuchtdichte ist erhalten. Dies ist wichtig für optische Geräte, Teilchenquellen e.t.c.

14 13.06.03

11 Erhaltungsgrößen, integrable Systeme

Erhaltungsgrößen sind Observable, deren Wert sich zeitlich nicht ändert, wobei hier eine Hamiltonsche Dynamik vorausgesetzt sei. Erhaltungsgrößen sind nicht nur wichtig um explizite Lösungen der Bewegungsgleichungen zu finden, es stellt sich heraus, daß sogenannte integrable Systeme, also Systeme mit hinreichend vielen Erhaltungsgrößen ein qualitativ verschiedenes Verhalten von nichtintegrablen oder chaotischen Systemen haben können. Die wichtigsten Erhaltungsgrößen, Energie, Gesamtimpuls, Drehimpuls, wurden bereits diskutiert. Hier geht es einmal um das Auffinden von Erhaltungsgrößen (Noether Theorem) und um die Lösung der kanonischen Bewegungsgleichungen falls Erhaltungsgrößen vorliegen.

Emmy Noether-Theorem:

Wir betrachten infinitesimale Transformationen, wie in (10.16) angegeben. Falls eine Erzeugende $g(p;q)$ gefunden werden kann, die die Hamiltonfunktion invariant läßt, ist $g(p;q)$ eine Erhaltungsgröße. Es sei also

$$H\Big(p-\epsilon\tfrac{\partial g}{\partial q};q+\epsilon\tfrac{\partial g}{\partial p}\Big)) = H(p;q)+\mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{11.1}$$

dann ist mit (10.17) und (9.17)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g = \Big\{g,H\Big\} = 0 \tag{11.2}$$

Damit ist $g(p;q)$ eine Erhaltungsgröße. Dabei wurde vorausgesetzt, daß $g(p;q)$ nicht explizit zeitabhängig ist, $H(p;q;t)$ kann aber von der Zeit abhängen, solange nur (11.1) erfüllt ist.

<u>Translationsinvarianz:</u>

Kartesische Koordinaten

$$g(p;x) = \sum_{i,\alpha} a_\alpha p_{i,\alpha} \qquad x_{i,\alpha} \to x_{i,\alpha}+\epsilon a_\alpha \qquad p_{i,\alpha} \to p_{i,\alpha} \tag{11.3}$$

Transformation: Infinitesimale homogene Translation in Richtung $\vec{a}$. Falls H invariant ist gegenüber Translationen in Richtung $\vec{a}$, ist der Gesamtimpuls in Richtung $\vec{a}$ erhalten.

<u>Rotationsinvarianz:</u>

$$g(p;x) = \sum_i \vec{\varphi}\cdot\vec{L}_i = \sum_i \vec{\varphi}\cdot[\vec{r}_i\times\vec{p}_i] \qquad \vec{r}_i \to \vec{r}_i+\epsilon\,\vec{\varphi}\times\vec{r}_i \qquad \vec{p}_i \to \vec{p}_i+\epsilon\,\vec{\varphi}\times\vec{p}_i \tag{11.4}$$

Transformation: Infinitesimale Rotation um eine Achse in Richtung von $\vec{\varphi}$. Falls H invariant ist gegenüber Rotationen um eine Achse in Richtung von $\vec{\varphi}$, ist der Gesamtdrehimpuls in Richtung von $\vec{\varphi}$ erhalten. (Bei der Rechnung zu (11.4) wurde die zyklische Invarianz des Spatprodukts $\vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{c}] = \vec{b}\cdot[\vec{c}\times\vec{a}]$ ausgenutzt.)

<u>Zeitliche Translationsinvarianz:</u>

Für nicht explizit zeitabhängige Hamiltonfunktion:

$$g(p;q) = H(p;q) \qquad q_n \to q_n+\epsilon\dot{q}_n p_n \to p_n+\epsilon\dot{p}_n \tag{11.5}$$

Energiesatz.

Erhaltungsgrößen als kanonische Impulse:

Gelingt es eine kanonische Transformation so zu finden, daß Erhaltungsgrößen kanonische Impulse werde, kann man diese durch ihre Anfangswerte ersetzen. Außerdem hängt dann die Hamiltonfunktion nicht mehr von den zugehörigen Ortsvariablen ab. Solche Variable nennt man zyklisch.

Beispiel: Drehimpuls

Für ein Teilchen in einem Zentralpotential ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.

$$H = \tfrac{1}{2m}p^2 + V(r) \qquad\qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{11.6}$$

Drehimpuls

$$L_x = yp_z - zp_y \qquad\qquad L_y = zp_x - xp_z \qquad\qquad L_z = xp_y - yp_x \tag{11.7}$$

Poissonklammerrelationen

$$\begin{aligned} \{L_x, H\} &= \tfrac{1}{m}\Big(p_y p_z - p_z p_y\Big) + \tfrac{V'(r)}{r}\Big(yz - zy\Big) = 0 \\ \{L_y, H\} &= 0 \qquad\qquad \{L_z, H\} = 0 \end{aligned} \tag{11.8}$$

$$\begin{aligned} \{L_x, L_y\} &= \{(yp_z - zp_y), (zp_x - xp_z)\} \\ &= \frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial z}\frac{\partial(zp_x - xp_z)}{\partial p_z} - \frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial p_z}\frac{\partial(zp_x - xp_z)}{\partial z} \\ &= (xp_y - yp_x) = L_z \\ \{L_y, L_z\} &= L_x \qquad\qquad \{L_z, L_x\} = L_y \end{aligned} \tag{11.9}$$

Für kanonische Impulse muß $\{P_k, P_l\} = 0$ gelten, also kann nur eine Komponente des Drehimpulses zu als kanonischer Impuls verwendet werden, obwohl alle Komponenten Erhaltungsgrößen sind.

Quadrat des Drehimpulses

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{11.10}$$

Mit $\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$ findet man

$$\{L_x, L^2\} = \{L_y, L^2\} = \{L_z, L^2\} = 0 \qquad\qquad \{L^2, H\} = 0 \tag{11.11}$$

Damit können beispielsweise H, L^2 und L_z gleichzeitig als kanonische Impulse eingesetzt werden.

Erhaltungsgrößen als kanonische Impulse:

Ergaltungdgrößen $F_1 \cdots F_{\overline{K}}$ so daß $\{F_k, F_l\} = 0$ für alle $k, l = 1 \cdots \overline{K}$

Kanonische Transformation so daß $P_l = F_l$ für $l = 1 \cdots \overline{K}$.

Aus Anfangswerten: $F_l = f_l$ damit

$$K(P; Q; t) = K(f_1, \cdots, f_{\overline{K}}; P_{\overline{K}+1}, \cdots, P_K; Q_{\overline{K}+1}, \cdots, Q_K; t) \tag{11.12}$$

Damit ist ein System mit nur noch $K - \overline{K}$ Freiheitsgraden zu lösen.

Integrable Systeme

Ein Integrables System ist ein System mit $\overline{K} = K$ Erhaltungsgrößen, deren Poissonklammerrelationen verschwinden.

Beispiele:

Eindimensionale Bewegung mit zeitunabhängigem H: $K = 1 \quad H = E$

Keplerproblem: Zweikörperproblem mit abstandsabhängigem zeitunabhängigen Wechselwirkungspotential: $K = 6$. Erhaltungsgrößen: Energie E, Gesamtimpuls $\vec{P}$, Relativer Drehimpuls L_z und L^2, also $\overline{K} = 6$ Feiheitsgrade.

Systeme harmonischer Oszillatoren, schwingende Saite, elastische Festkörper (in harmonischer Näherung) $\cdots$.

Bewegungsgleichungen für integrable Systeme:

$$\dot{Q}_l = \frac{\partial K(f_1 \cdots f_{\overline{K}})}{\partial f_l} = v_l(f_1 \cdots f_{\overline{K}}) \qquad Q_l(t) = Q_l(0) + v_l(f_1 \cdots f_{\overline{K}})\, t \tag{11.13}$$

Anfangsbedingungen: $f_1 \cdots f_{\overline{K}}$ und $Q_1(0) \cdots Q_{\overline{K}}(0)$.

Explizite Konstruktion der kanonischen Transformation

Gegeben sei Erhaltungsgröße $F(p;q)$. Einer der Impulse, z.B. p_1 soll durch $P_1 = F(p;q)$ ersetzt werden:

1) Auflösen von $P_1 = F(p;q)$ nach

$$p_1 = p_1(P_1, p_2, \cdots, p_K, q_1, \cdots, q_K) \tag{11.14}$$

2) Erzeugende Funktion, (10.14)

$$p_1(P_1, p_2, \cdots, p_K, q_1, \cdots, q_K) = \frac{\partial G(P_1, p_2, \cdots, p_K, q_1, \cdots, q_K)}{\partial q_1} \tag{11.15}$$

$$G(P_1, p_2, \cdots, p_K, q_1, \cdots, q_K) = \int_{\overline{q}_1}^{q} \mathrm{d}q'\, p_1(P_1, p_2, \cdots, p_K, q', q_2, \cdots, q_K) \tag{11.16}$$

3) Neue Ortskoordinate

$$Q_1 = \left.\frac{\partial G(P_1, p_2, \cdots, p_K, q_1, \cdots, q_K)}{\partial P_1}\right|_{P_1 = F(p;q)} = Q_1(p;q) \tag{11.17}$$

4) Neue Hamiltonfunktion:

$$K(P_1(p;q), p_2, \cdots, p_K; Q_1(p;q), q_2, \cdots q_K) = H(p;q) \tag{11.18}$$

Wegen

$$\dot{P}_1 = \frac{\partial K}{\partial Q_1} = 0 \qquad K = K(f_1, p_2, \cdots, p_K; q_2, \cdots q_K) \tag{11.19}$$

Damit hängt K nur noch von den Variablen $p_2 \cdots p_K$, $q_1 \cdots q_K$ und dem Anfangswert f_1 ab. Statt p_1, q_1 kann auch irgend ein anderes Paar p_n, q_n zugunsten von F eliminiert werden. Falls weitere Erhaltungsgrößen existieren, ist die Prozedur zu wiederholen.

Harmonischer Oszillator:

$$H = \tfrac{1}{2m}p^2 + \tfrac{m}{2}\omega^2\, q^2 = E \tag{11.20}$$

1) $p = p(E, q)$:

$$p = \sqrt{2m(E - \tfrac{m}{2}\omega^2 q^2)} = m\omega\sqrt{\tfrac{2E}{m\omega^2} - q^2} \tag{11.21}$$

Es ist etwas einfacher 2) und 3) in vertauschter Reihenfolge durch zu führen:

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial^2 G}{\partial q\, \partial E} = \frac{\partial p}{\partial E} = \frac{1}{\omega}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2}} \tag{11.22}$$

Neue Ortskoordinate:

$$Q = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{q}{a}\right) \qquad \text{mit} \qquad a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \tag{11.23}$$

4) Neue Hamiltonfunktion:

$$K = E \qquad \dot{Q} = 1 \qquad Q = Q_0 + t \tag{11.24}$$

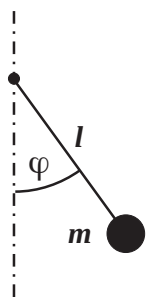
Mit $\omega\, Q_0 = \varphi$:

$$q(t) = a\, \sin(\varphi + \omega t) \tag{11.25}$$

Das ist das bekannte Resultat für den harmonischen Oszillator.
(Ein neuer Weg eine Fliege zu erschlagen!?)

15 20.06.03

Mathematisches Pendel:



Koordinaten:

$$q = \varphi \qquad p = ml^2\dot{\varphi} \tag{11.26}$$

Hamiltonfunktion:

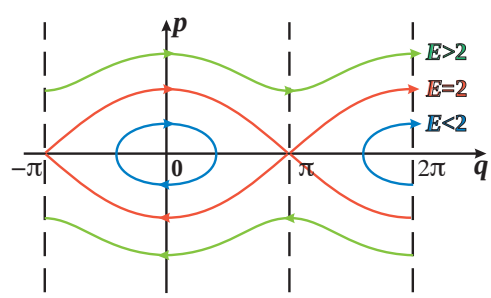
$$H = E = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl\Big(1 - \cos(q)\Big) \tag{11.27}$$

Speziell für $ml^2 = mgl = 1$:

$$H = \tfrac{1}{2}p^2 + 1 - \cos(q) \tag{11.28}$$

Trajektorien im Phasenraum

$$p = \pm\sqrt{2\Big(E - 1 + \cos(q)\Big)} \tag{11.29}$$



<u>Kanonische Transformation:</u> Neuer Impuls: $P = H = E$

Erzeugende Funktion, (11.16), mit $q_0 = 0$

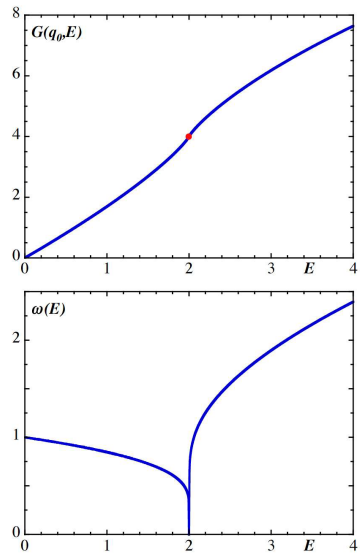
$$G(q, E) = \int_0^q \mathrm{d}q'\, p(q', E) = \pm\int_0^q \mathrm{d}q'\, \sqrt{2\Big(E - 1 + \cos(q')\Big)}$$

$$= \pm\sqrt{8E}\int_0^{\frac{1}{2}q} \mathrm{d}x\sqrt{1 - \tfrac{2}{E}\sin(x)^2} = \pm\sqrt{8E}\, E_L\Big(\tfrac{1}{2}q, \sqrt{\tfrac{2}{E}}\Big) \tag{11.30}$$

wobei $E_L(\varphi, k)$ das Legendresche Normalintegral zweiter Klasse ist.

Die neue Ortsvariable ist

$$Q = \frac{\partial G(q,E)}{\partial E} \qquad \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial E} = 1 \tag{11.31}$$



Damit ist $Q = t(q,0)$ gleich der Zeit, die das Pendel gebraucht hat um von $q = 0$ bis q zu gelangen.

<u>$E < 2$:</u> Umkehrpunkte $q_0 = \pm \arccos(1-E)$.
Schwingungsperiode:

$$\tau = 4\,\frac{\partial G(q_0,E)}{\partial E} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{11.32}$$

<u>$E > 2$:</u> Periode $q_0 = \pm\pi$
Zeit für einen Überschlag:

$$\tau = 2\,\frac{\partial G(\pi,E)}{\partial E} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{11.33}$$

Für $E \to 0$: $\omega \to 1$ (Harmonischer Oszillator)

Für $E \to 2^-$: Mit $E = 2-\epsilon$: $G(q_0,E) \to 4 + \frac{1}{2}\epsilon\ln(2\epsilon)$ und $\omega \to \dfrac{\frac{1}{2}\pi}{|\ln(2\epsilon)|}$

Für $E \to 2^+$: Mit $E = 2+\epsilon$: $G(q_0,E) \to 4 - \epsilon\ln(2\epsilon)$ und $\omega \to \dfrac{\pi}{|\ln(2\epsilon)|}$

Für $E \to \infty$: $G(\pi,E) \to \pi\sqrt{2E}$ und $\omega \to \sqrt{2E}$ (Freier Rotator).

Fluß im Γ-Raum:

Ein Integrables System ist durch die Anfangswerte der erhaltenen Impulse $P_l = f_l$ charakterisiert. Diese bestimmen auch die Geschwindigkeiten $v_l(f_1 \cdots f_{\overline{K}})$, (11.13). Betrachten wir ein kleines Volumen

$$\Delta V_\Gamma(0) = \prod_l \Delta f_l\,\Delta Q_l(0) = \Delta V_\Gamma(t) = \prod_l \Delta f_l\,\Delta Q_l(t) \tag{11.34}$$

wobei der Liouville-Satz berücksichtigt wurde. Nimmt man an, daß $\Delta V_\Gamma(0)$ die Form eines Hyperwürfels im Γ-Raum hat, deformiert sich dieser in ein Hyperparallelepiped im Γ-Raum. In Richtung der Impulse tritt keine Verformung ein, da diese, und damit auch die Δf_l, zeitlich konstant sind. Aufgrund der f_l-Abhängigkeit der Geschwindigkeiten $v_l(f_1 \cdots f_K)$ bewegen sich die Punkte in V_Γ nicht mehr mit gleichmäßiger Geschwindigkeit, und das Volumen wird verformt. Da $Q_l(t) - Q_l(0)$ linear mit t anwächst, wächst auch die größte lineare Ausdehnung des Volumens $\ell_\Gamma(t) \sim t$. Im Gegensatz dazu wächst, wie wir sehen werden, $\ell_\Gamma(t)$ sehr viel schneller an.

16 24.06.03

12 Nichtintegrable Systeme, Chaos.

In Nichtintegrablen Systemen ist die Zahl der Erhaltungsgrößen mit verschwindenden Poissonklammerrelationen $\overline{K}$ kleiner als die Zahl der Freiheitsgrade K (Freiheitsgrade sind hier als Zahl der unabhängigen Orts- b.z.w. Impulskoordinaten gezählt. Manchmal wird auch $2K$ als Zahl der Freiheitsgrade bezeichnet).

Man kann wieder alle Erhaltungsgrößen zu kanonischen Impulsen machen und erhält eine Hamiltonfunktion für die verbleibenden $\hat{K} = K - \overline{K}$ Impuls- und Ortskoordinaten, die die Anfangswerte der erhaltenen Größen als Parameter erhält:

$$K = K(f_1, \cdots, f_{\overline{K}}, P_{\overline{K}+1}, \cdots, P_K; Q_{\overline{K}+1}, \cdots, Q_K; t). \tag{12.1}$$

Periodisch angetriebener Rotator:

Als einfachstes Beispiel eines nichtintegrablen Systems betrachten wir zunächst einen periodisch angetriebenen Rotator, auf den eine zeitabhängige Kraft

$$f(t) = f_0 \sum_n \sin\Big(\varphi(n\tau)\Big)\delta(t - n\tau) \tag{12.2}$$

einwirkt.

Die Hamiltonfunktion mit Ortskoordinate $q = \varphi$, Impuls $p = \psi$, Masse b.z.w. Trägheitsmoment $m = \Theta = 1$ sei

$$H = \tfrac{1}{2}\psi^2 + f_0 \sum_n \cos(\varphi)\delta(t - n\tau) \tag{12.3}$$

Da H explizit von der Zeit abhängt, ist die Energie nicht mehr erhalten, und es existieren keine weiteren Erhaltungsgrößen. Das System ist nichtintegrabel.

Impulsänderung aufgrund der Stöße

$$\dot{\psi}(t) = f(t) \qquad \Delta\psi_n = \psi_n - \psi_{n-1} = \int_{n\tau-\epsilon}^{n\tau+\epsilon} \mathrm{d}t\, \dot{\psi}(t) = f_0 \sin(\varphi_n) \tag{12.4}$$

mit $\varphi_n = \varphi(n\tau)$ und $\psi_n = \psi(n\tau + \epsilon)$.

Zwischen den Stößen ist der Impuls erhalten.

Energieänderung aufgrund der Stöße für kleine f_0:

$$\Delta E_n = \tfrac{1}{2}\Big(\psi_n + \psi_{n-1}\Big)\cos(\varphi_n) f_0 \tag{12.5}$$

Zwischen den Stößen ist die Energie erhalten.

Für $n\tau < t < (n+1)\tau$ ist $\psi(t) = \psi_n$ und $\varphi(t) = \varphi_n + \psi_n \tau$.

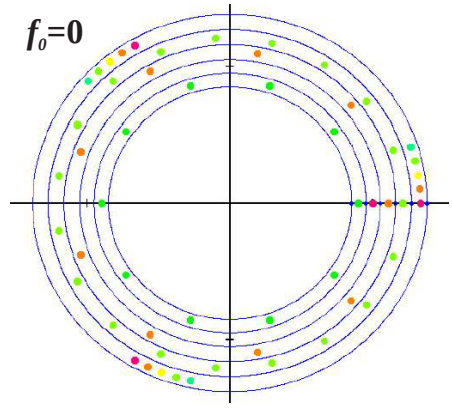
<u>Abbildung, Poincare-Schnitt:</u>

Damit erhält man die Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \Big(\varphi_n + \tau\psi_n\Big) \bmod 2\pi \\ \psi_{n+1} &= \psi_n + f_0 \sin(\varphi_{n+1}) = \psi_n + f_0 \sin(\varphi_n + \tau\psi_n) \end{aligned} \tag{12.6}$$

Diese Abbildung kann als kanonische Transformation der alten Variablen $\Big(\psi_n, \varphi_n\Big)$ auf die neuen Variablen $\Big(\psi_{n+1}, \varphi_{n+1}\Big)$ aufgefat werden, da $\{\varphi_{n+1}, \psi_{n+1}\} = 1$.

In den folgenden Figuren ist jeweils φ_n als Winkel und ψ_n als Radius aufgetragen, i.e. $x = \psi_n \cos(\varphi_n), \quad y = \psi_n \sin(\varphi_n)$.
Zur Vereinfachung wählen wir $\tau = 2\pi$.



$f_0 = 0$:

Das System ist integrabel.
Für rationale Werte von $\psi = \dfrac{n}{m}$ erhält man eine m-periodische Bewegung, i.e. nach einer Zeit $t = m\tau$ ist der Ausgangspunkt wieder erreicht.

Für irrationale Werte von ψ erhält man keine periodische Bewegung und jeder Wert von φ bei festem ψ wird erreicht.

$f_0 \neq 0$: Fixpunkte

$$\varphi^* = \Big(\varphi^* + \tau\psi^*\Big) \bmod 2\pi \qquad \psi^* = \psi^* + f_0 \sin(\varphi^* + \tau\psi^*) \tag{12.7}$$

$$\tau\psi^* = 2k\pi \quad \text{mit ganzzahligem } k \quad \text{und} \quad \varphi^* = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi^* = \pi \tag{12.8}$$

Entwicklung für kleine Abweichungen von einem Fixpunkt:

$$\varphi_n = \varphi^* + \epsilon_n \qquad \psi_n = \psi^* + \eta_n \tag{12.9}$$

Linearisierte Abbildung:

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \tau\eta_n \qquad \eta_{n+1} = \eta_n \pm f_0\Big(\epsilon_n + \tau\eta_n\Big) \quad \text{für} \quad \begin{cases} \varphi^* = 0 \\ \varphi^* = \pi \end{cases} \tag{12.10}$$

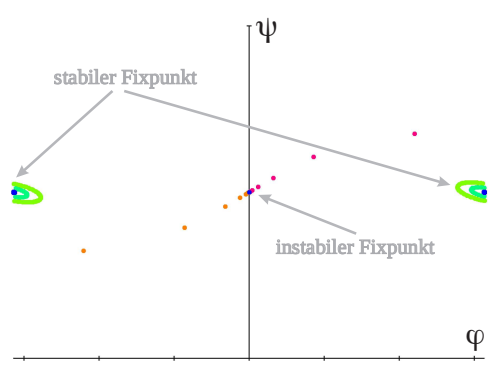
Eigenwertgleichung: Mit $f_s = \pm f_0$:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \sum_\lambda a_\lambda \lambda^n \begin{pmatrix} \epsilon_\lambda \\ \eta_\lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \begin{pmatrix} \epsilon_\lambda \\ \eta_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ f_s & 1 + f_s\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_\lambda \\ \eta_\lambda \end{pmatrix} \tag{12.11}$$

Nichttriviale Lösung für

$$\left\| \begin{matrix} 1-\lambda & \tau \\ f_s & 1 + f_s\tau - \lambda \end{matrix} \right\| = 0 \qquad \lambda^2 - \Big(2 + f_s\tau\Big)\lambda + 1 = 0 \tag{12.12}$$

$$\lambda_\pm = 1 + \tfrac{1}{2} f_s\tau \pm \sqrt{f_s\tau\,(1 + \tfrac{1}{4} f_s\tau)} \tag{12.13}$$



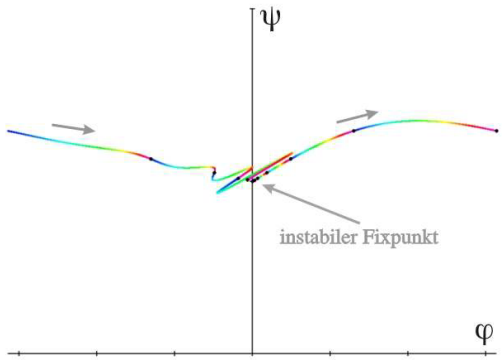
Für $f_s > 0$ existieren zwei reelle Eigenwerte $\lambda_+ > 1$ und $\lambda_- < 1$. Der zugehörige Fixpunkt ist instabil, i.e. kleine Abweichungen wachsen exponentiell an.

Für $f_s < 0$ existieren zwei konjugiert komplexe Eigenwerte $\lambda_- = \lambda_+^*$ mit $|\lambda_\pm| = 1$. Der zugehörige Fixpunkt ist stabil, kleine Abweichungen wachsen nicht an.

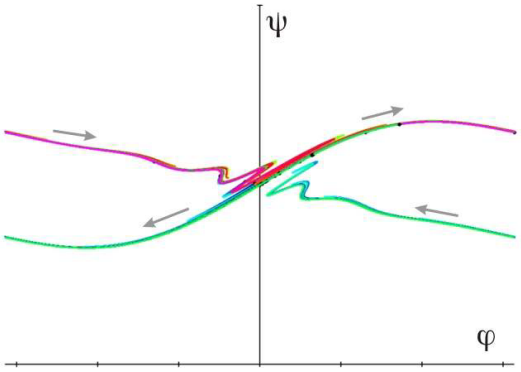
Diese Überlegungen lassen sich auf m-periodische Lösungen übertragen, indem man die m-fach iterierte Abbildung betrachtet, in der diese Lösungen als Fixpunkte erscheinen.

17 27.06.03

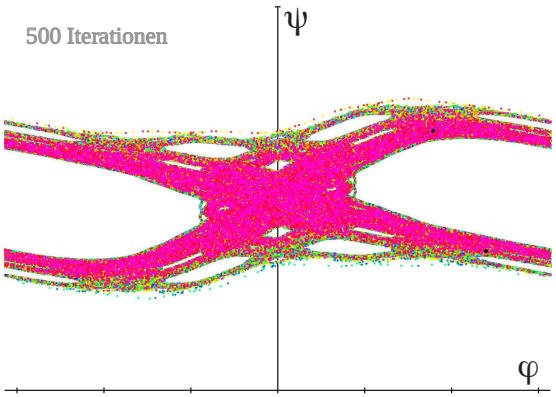
In den folgenden Abbildungen wird gezeigt, wie sich eine Gruppe von Punkten im Phasenraum unter der Abbildung verhält. Es wurden ca. 100000 Punkte auf einer Linie in der Nähe des instabilen Fixpunktes $\varphi^* = 1$, $\psi^* = 1$ gestartet. Die Punkte wurden so gewählt, daß der erste Punkt der n. Iteration mit dem letzten Punkt der $(n+1)$. Iteration übereinstimmt.



Man erkennt, daß die Strecke, auf der die Punkte liegen (farbkodiert, jeweils zwischen aufeinanderfolgenden schwarzen Marken) sich von Iteration zu Iteration verlängert. Bei erneuter Annäherung an den instabilen Fixpunkt tritt zur Streckung eine Faltung hinzu.

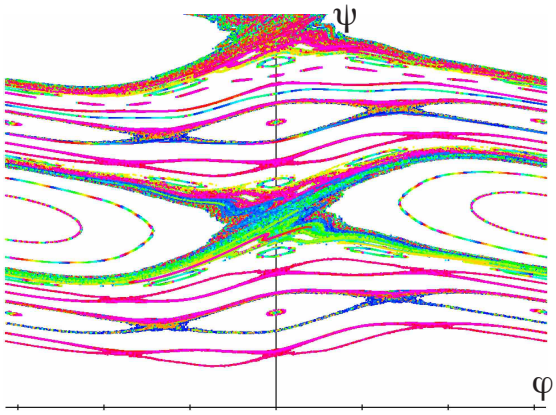


Mit fortschreitender Iteration (fortschreitender Zeit) wiederholt sich der Prozess des Streckens und Faltens.

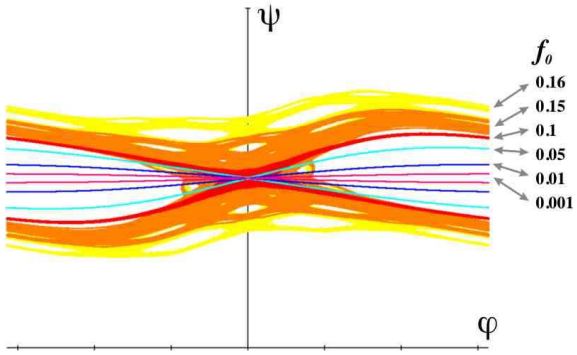


Allmählich wird ein Teil des Phasenraums ausgefüllt.

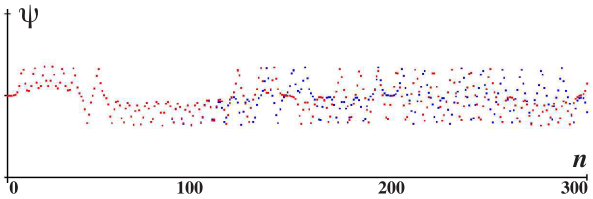
Verschiedene Startpunkte können voneinander getrennte Bereiche ausfüllen. Dabei treten chaotische Bereiche mit unterschiedlicher Zahl von "Löchern",z.B m, auf. Sie sind aus ungestörten periodischen trajektorien mit rationalen ψ entstanden. Chaotische Bereiche mit kleinen m sind breiter als solche mit größeren m. In nebenstehendem Beispiel sind Bereiche mit $m = 1$, $m = 2$ und $m = 3$ gut sichtbar.



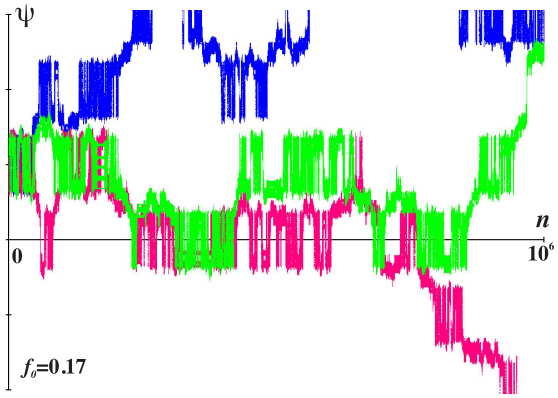
Mit wachsender Störung f_o werden die chaotischen Bereiche breiter und verschmelzen mit vorher getrennten Bereichen.



Die tatsächlich durchlaufenen Trajektorien hängen extrem empfindlich von Anfangsbedingungen ab. Im gezeigten Beispiel wurden zwei Anfangsbedingungen mit einem relativen Abstand von 10^{-7} gewählt. Nach ca 100 Iterationen sind die Trajektorien nicht mehr korreliert.



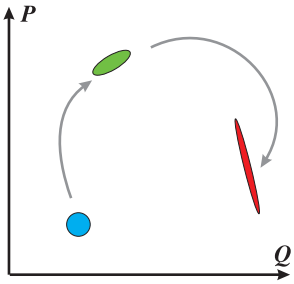
Für $f_o = 0.17$ sind die chaotischen Bereiche um ganzzahlige Werte von ψ bereits verschmolzen, bei $\psi = 0.165$ waren sie noch getrennt. Gezeigt sind drei Trajektorien mit fast identischen Anfangsbedingungen. Die Trajektorien bewegen sich über längere Zeiten (Iterationen) hinweg nur im Bereich der vorher noch getrennten chaotischen Bereiche, um dann relativ rasch zwischen derartigen Bereichen zu springen.



Die hier gezeigten Phänomene können zum Teil im Rahmen der KAM-Theorie (Kolmogorow, Arnold, Moser 1955) verstanden werden.

Lyapunov Exponenten:

Betrachte eine "Kugel" mit Radius Δr im Phasenraum: $\Delta V_\Gamma(t=0) = C_{2K}\,(\Delta r)^{2K}$. Zur Zeit t und für $\Delta r \to 0$: Ellipsoid mit Halbachsen $\Delta a_n(t)$ mit $n = 1 \cdots 2K$.



Lyapunov-Exponenten λ_n:

$$\Delta a_n(t) \to \mathrm{e}^{\lambda_n t}\Delta r \tag{12.14}$$

$$\lambda_n = \lim_{t\to\infty}\lim_{\Delta r\to 0}\frac{1}{t}\ln\Big(\frac{\Delta a_n(t)}{\Delta r}\Big) \tag{12.15}$$

Liouville-Satz:

$$\Delta V_\Gamma(t) = C_{2K}\prod_{n=1}^{2K}\Delta a_n(t) = C_{2K}\,\mathrm{e}^{\sum_{n=1}^{2K}\lambda_n t}\,(\Delta r)^{2K} = \Delta V(0) = C_{2K}(\Delta r)^{2K} \tag{12.16}$$

Damit ist

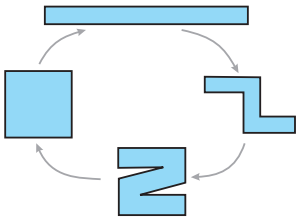
$$\sum_{n=1}^{2K} \lambda_n = 0 \tag{12.17}$$

Integrable Systeme: $\lambda_n = 0$ für alle n.

Chaotische Systeme: Mindestens ein $\lambda_n > 0$.

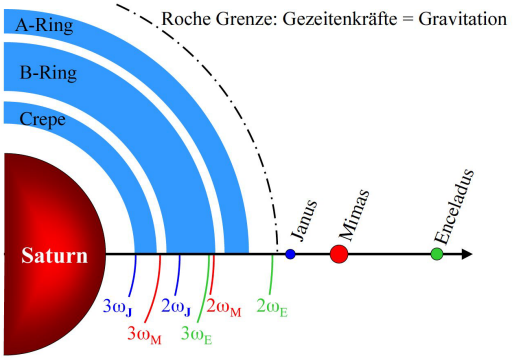
18 1.07.03

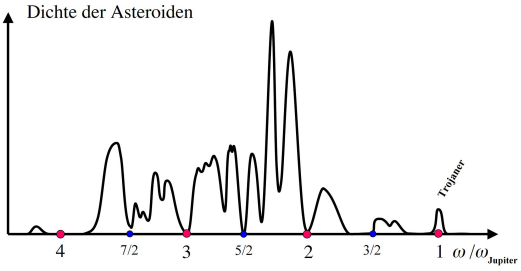
Bäckertransformation



Schematisch wird der Prozess des Streckens und Faltens durch die sogenannte Bäckertransformation (Kneten von Brotteig) beschrieben. Im gezeigten Beispiel wird pro Umlauf in x-Richtung um den Faktor 3 gedehnt, in y-Richtung um den Faktor 3 gestaucht. Man erhält also die Lyapunovexponenten $\lambda_\pm = \frac{1}{\tau}\ln(3)$.

Saturnringe, Asteroiden, Beschleunigerringe:





Wir hatten gesehen, daß m-periodische Trajektorien mit kleinem m besonders stark gestört werden. Betrachtet man z.B. Teilchen, die im Gravitationsfeld der Sonne oder eines Planeten mit einer Frequenz ω umlaufen, können diese durch andere Planeten oder Monde periodisch, mit einer Frequenz ω', gestört werden. Für rationale Verhältnisse $\omega/\omega' = n/m$ mit kleinem n und m (Resonanz) erwartet man besonders ausgeprägte chaotische Bereiche. Diese Bereiche sind als Lücken in planetaren Ringsystemen (Saturnringe) oder in der Verteilung von Asteroiden sichtbar.

Beim Bau von Beschleuniger- oder Speicherringen sind Resonanzen, die zu chaotischen Trajektorien der Teilchen führen, zu vermeiden. Resonanzen können zwischen Umlauffrequenz der Teilchen und Schwingungen aufgrund von Fokussierungen auftreten.

Als weiteres Beispiel sei die Bewegung der Erdachse genannt (Präzession und Nutation), genannt, die ebenfalls "chaotisch" ist. Resultierende Schwankungen sind eine mögliche Ursache für das Auftreten von Eis- und Warmzeiten.

13 Kleine Schwingungen

Wie wir gesehen haben sind Systeme mit mehr als zwei Teilchen typischerweise nicht integrabel. Für viele Anwendungen in der Physik kann man jedoch davon ausgehen, daß Ruhelagen existieren, und daß die Auslenkungen der Teilchen aus den Ruhelagen klein sind. Dies führt zu Systemen gekoppelter harmonischer Oszillatoren, die wieder ein integrables System sind, wie gezeigt wird. Auf diese Weise kann man z.B. Festkörper bei nicht allzu hoher Temperatur oder auch Molekülschwingungen gut behandeln. Korrekturen zur harmonischen Näherung können störungstheoretisch untersucht werden, was aber im Rahmen der Vorlesung nicht gemacht werden soll.

Wir Betrachten N Teilchen, also $K = 3N$ Freiheitsgrade. Die Kräfte seien konservativ, also durch zeitunabhängige Potentiale beschrieben.
Die Hamiltonfunktion ist

$$H = \sum_n \frac{p_n^2}{2m_n} + V(\{q\}) \tag{13.1}$$

Dabei sei $n = 1 \cdots K$ und die Massen verschiedener Teilchen müssen nicht notwendigerweise gleich sein.
<u>Gleichgewichtslagen:</u>

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = -\frac{\partial V(\{q\})}{\partial q_n}\bigg|_{q=\overline{q}} = 0 \tag{13.2}$$

<u>Harmonische Näherung:</u>
Entwicklung um $\overline{q}_n$ bis zur zweiten Ordnung. Terme erster Ordnung verschwinden wegen (13.2). Mit $q_n = \overline{q}_n + u_n$

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{1}{2}\sum_n \frac{p_n^2}{m_n} + V(\{\overline{q}\}) + \tfrac{1}{2}\sum_{n,m} \frac{\partial^2 V(\{\overline{q}\})}{\partial \overline{q}_n \partial \overline{q}_m} u_n u_m \\ &= V_0 + \tfrac{1}{2}\sum_n \frac{p_n^2}{m_n} + \tfrac{1}{2}\sum_{n,m} \Phi_{n,m} u_n u_m \end{aligned} \tag{13.3}$$

Ziel: Finde kanonische Transformation so daß $H = \sum_l H_l(P_l, Q_l)$

<u>1. kanonische Transformation:</u>
Diese Transformation ist nicht nötig wenn alle Massen gleich sind.

$$\hat{p}_n = \frac{p_n}{\sqrt{m_n}} \qquad \hat{u}_n = \sqrt{m_n}\, u_n \qquad \hat{\Phi}_{n,m} = \frac{\Phi_{n,m}}{\sqrt{m_n m_m}} \tag{13.4}$$

$$H = V_0 + \tfrac{1}{2}\sum_n \hat{p}_n^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{n,m} \hat{\Phi}_{n,m} \hat{u}_n \hat{u}_m \tag{13.5}$$

<u>2. kanonische (orthogonale) Transformation:</u>
$\hat{\Phi}_{n,m}$ ist reell und symmetrisch, $\hat{\Phi}$ kann durch eine orthogonale Transformation diagonalisiert werden: Eigenwertproblem

$$\sum_m \hat{\Phi}_{n,m}\, \eta_{l,m} = \Lambda_l\, \eta_{l,n} \tag{13.6}$$

Es gelten Orthogonaltäts- und Vollständigkeitsrelationen:

$$\sum_n \eta_{k,n}\eta_{l,n} = \delta_{k,l} \qquad \sum_l \eta_{l,n}\eta_{l,m} = \delta_{n,m} \tag{13.7}$$

"Normalkoordinaten"

$$P_l = \sum_n \eta_{l,n}\hat{p}_n \qquad Q_l = \sum_n \eta_{l,n}\hat{u}_n \tag{13.8}$$

$$H = V_0 + \tfrac{1}{2}\sum_l \left\{P_l^2 + \Lambda_l Q_l^2\right\} = V_0 + \sum_l H_l(P_l, Q_l) \tag{13.9}$$

Wegen $\{Q_k, Q_l\} = \{P_k, P_l\} = 0$ und $\{Q_k, P_l\} = \delta_{k,l}$ gilt $\{H, H_l\} = 0$ und $\{H_k, H_l\} = 0$. Damit hat man K Erhaltungsgrößen $H_l = E_l$, das System ist in harmonischer Näherung integrabel.

Kanonische Bewegungsgleichungen:

$$\dot{Q}_l = P_l \qquad \dot{P}_l = -\Lambda_l Q_l \tag{13.10}$$

<u>$\Lambda_l = \omega_l^2 > 0$:</u>

$$Q_l(t) = a_l \sin(\omega_l t + \varphi_l) \qquad P_l(t) = a_l\omega_l \cos(\omega_l t + \varphi_l) \tag{13.11}$$

Die Amplitude a_l und die Phase φ_l sind Integrationskonstanten, die aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.

$$\begin{aligned} q_n(t) &= \overline{q}_n + \frac{1}{\sqrt{m_n}}\sum_l \eta_{l,n} a_l \sin(\omega_l t + \varphi_l) \\ p_n(t) &= \sqrt{m_n}\sum_l \eta_{l,n} a_l \omega_l \cos(\omega_l t + \varphi_l) \end{aligned} \tag{13.12}$$

<u>$\Lambda_l = 0$:</u>

$$P_l(t) = P_l(0) \qquad Q_l(t) = Q_l(0) + P_l(0)\,t \tag{13.13}$$

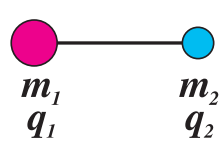
<u>$\Lambda_l = -\gamma_l^2 < 0$:</u>

$$Q_l(t) = a_l \mathrm{e}^{\gamma_l t} + b_l \mathrm{e}^{-\gamma_l t} \qquad P_l(t) = a_l\gamma_l \mathrm{e}^{\gamma_l t} - b_l\gamma_l \mathrm{e}^{-\gamma_l t} \tag{13.14}$$

Für $\Lambda_l < 0$ wachsen die Auslenkungen beliebig an. Das System ist instabil, oder die harmonische Näherung ist für größere Auslenkungen nicht mehr gültig.

19 4.07.03

Zweiatomiges Molekül:



$$V = V(|\vec{q}_1 - \vec{q}_2|) \qquad V'(a) = 0 \tag{13.15}$$

Gleichgewichtslage, z.B.:

$$\vec{\overline{q}}_1 - \vec{\overline{q}}_2 = (a, 0, 0) \tag{13.16}$$

Mit

$$r = \sqrt{\sum_\alpha x_\alpha^2} \qquad \frac{\partial V(r)}{\partial x_\alpha} = \frac{x_\alpha}{r}V'(r) \tag{13.17}$$

$$\frac{\partial^2 V(r)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{x_\alpha x_\beta}{r^2} V''(r) + \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r} - \frac{x_\alpha x_\beta}{r^3} \right) V'(r) \tag{13.18}$$

und $V''(a) = \Phi$:

$$\hat{\underline{\underline{\Phi}}} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi}{m_1} & 0 & 0 & \frac{-\Phi}{\sqrt{m_1 m_2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\Phi}{\sqrt{m_1 m_2}} & 0 & 0 & \frac{\Phi}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13.19}$$

Eigenwertgleichung:

$$\left\| \hat{\underline{\underline{\Phi}}} - \Lambda \right\| = 0 \qquad \Lambda^6 - \frac{\Phi}{m} \Lambda^5 = 0 \qquad \text{mit} \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{13.20}$$

Eigenwerte: $\Lambda_1 = \frac{\Phi}{m}$, $\Lambda_2 = \cdots = \Lambda_6 = 0$.
Eigenvektoren: Mit $M = m_1 + m_2$
Schwingungen mit Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{\Phi}{m}}$

$$\vec{\eta}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m_2}{M}} \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{\frac{m_1}{M}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_1 = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13.21}$$

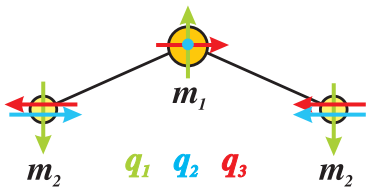
Translationen: $\Lambda = 0$

$$\vec{\eta}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m_1}{M}} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{m_2}{M}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{M}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{m_1}{M}} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{m_2}{M}} \\ 0 \end{pmatrix} \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\eta}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{m_1}{M}} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{m_2}{M}} \end{pmatrix} \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \end{pmatrix} \tag{13.22}$$

Rotationen um y- b.z.w. z-Achse: $\Lambda = 0$

$$\vec{\eta}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{m_2}{M}} \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{\frac{m_1}{M}} \\ 0 \end{pmatrix} \vec{u}_5 = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\eta}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{m_2}{M}} \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{\frac{m_1}{M}} \end{pmatrix} \vec{u}_6 = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_2} \end{pmatrix} \tag{13.23}$$

Symmetrisches dreiatomiges Molekül:



Das Molekül hat 9 Freiheitsgrade. Infinitesimale Translationen und infinitesimale Rotationen führen zu Eigenwerten $\Lambda = 0$. Es bleiben drei Freiheitsgrade, die zu Schwingungen mit $\Lambda \neq 0$ führen können. Die zugehörigen Auslenkungen werden entsprechend nebenstehender Figur parametrisiert, wobei die zu q_1 und q_2 gehörigen Auslenkungen symmetrisch bezüglich Spiegelungen an der Symmetrieebene sind, die zu q_3 gehörigen Auslenkungen sind antisymmetrisch.

Die Hamitonfunktion muß bezüglich dieser Symmetrieoperation symmetrisch sein. In der harmonischen Entwicklung dürfen also keine Koeffizienten auftreten, die q_3 linear enthalten. Daraus ergibt sich für die Freiheitsgrade $q_1 \cdots q_3$:

$$\underline{\underline{\hat{\Phi}}} = \begin{pmatrix} A & C & 0 \\ C & B & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \tag{13.24}$$

Die antisymmetrische Schwingung hat den Eigenwert $\Lambda_3 = D$. Für die verbleibenden Eigenwerte erhält man die Eigenwertgleichung

$$\Lambda^2 - (A+B)\Lambda + AB - C^2 \tag{13.25}$$

Mit

$$\Lambda_\pm = \tfrac{1}{2}(A+B) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(A-B)^2 + C^2} \tag{13.26}$$

Die hierzu gehörigen Normalmoden sind also Linearkombinationen aus den beiden symmetrischen Auslenkungstypen q_1 und q_2.

Lineare einatomige Kette:

Lineare einatomige Kette mit nächster Nachbar Wechselwirkung. Es werden nur longitudinale Auslenkungen betrachtet. Gitterkonstante a: $q_{n+1} - q_n = a + u_{n+1} - u_n$

$$H = \frac{1}{2m}\sum_n p_n^2 + \sum_n V(a + u_{n+1} - u_n) = V_0 + \frac{1}{2m}\sum_n p_n^2 + \frac{1}{2}\Phi \sum_n \Big(u_{n+1} - u_n\Big)^2 \tag{13.27}$$

Periodische Randbedingungen (N Gitterplätze) $u_{N+1} = u_1$.

Lösungsansatz für Eigenvektor: Ebene Welle

$$\eta_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\mathrm{e}^{ikna} \qquad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{aN}\ell \tag{13.28}$$

wobei ℓ ganzzahlig und $-\frac{N}{2} < \ell \leq \frac{N}{2}$ ist.

Modifizierte Orthogonalitätsrelationen ($\eta_{k,n}$ komplex!)

$$\sum_n \eta^*_{k,n}\eta_{k',n} = \delta_{k,k'} \qquad \sum_k \eta_{k,n}\eta^*_{k,n'} = \delta_{n,n'} \tag{13.29}$$

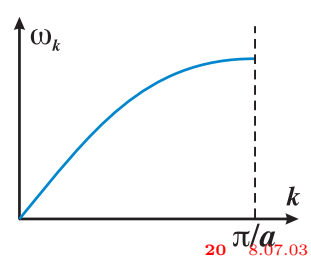
Normalkoordinaten

$$p_n = \sum_k p_k \eta_{k,n} = \sum_k p^*_k \eta^*_{k,n} \qquad u_n = \sum_k u_k \eta_{k,n} = \sum_k u^*_k \eta^*_{k,n} \tag{13.30}$$

$$\begin{aligned} H &= \sum_k \Big\{ \tfrac{1}{2m} p^*_k p_k + \tfrac{1}{2}\Phi\Big(\mathrm{e}^{-ika} - 1\Big)\Big(\mathrm{e}^{ika} - 1\Big) u^*_k u_k \Big\} \\ &= \sum_k \Big\{ \tfrac{1}{2m} p^*_k p_k + \tfrac{m}{2}\omega_k^2 u^*_k u_k \Big\} \end{aligned} \tag{13.31}$$

mit

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{\Phi}{m}}\,\Big|\sin(\tfrac{1}{2}ka)\Big| \tag{13.32}$$



20 8.07.03

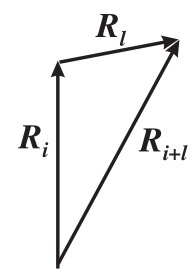
14 Kontinuumsmechanik, schwingende Saite

Für Auslenkungen, die sich auf makroskopischer Längenskala ändern, ist eine Kontinuumsbeschreibung angebracht. Man erhält damit eine sogenannte Feldtheorie, deren Grundelemente nicht mehr zeitabhängige Orte und Impulse oder Geschwindigkeiten von Teilchen sind, sondern Felder, also Funktionen von Ort und Zeit. Im Fall der Elastizitätstheorie läßt sich diese als Kontinuumslimes eines Festkörpers in harmonischer Näherung herleiten. Für andere Feldtheorien, z.B. Elektrodynamik oder Quantenmechanik, ist eine dahinterliegende diskrete Theorie nicht offensichtlich.

Kontinuumslimes eines Festkörpers in harmonischer Näherung: Elastizitätstheorie

Gleichgewichtslagen und Auslenkungen

$$\vec{\bar{q}}_i = \vec{R}_i \qquad \vec{u}_i = \vec{u}(\vec{R}_i) \tag{14.1}$$



Harmonische Kraftkonstanten

$$\Phi^{i,j}_{\alpha,\beta} = -\Psi_{\alpha,\beta}(\vec{R}_i - \vec{R}_j) \qquad \Phi^{i,i}_{\alpha,\beta} = \sum_l \Psi_{\alpha,\beta}(\vec{R}_l) \tag{14.2}$$

Lagrangefunktion: $m_i = m$

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{m}{2}\sum_{i,\alpha} \dot{u}_\alpha(\vec{R}_i)^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{i,\alpha,j,\beta} u_\alpha(\vec{R}_i)\Phi^{i,j}_{\alpha,\beta} u_\beta(\vec{R}_j) \\ &= \tfrac{m}{2}\sum_{i,\alpha} \dot{u}_\alpha(\vec{R}_i)^2 \\ &- \tfrac{1}{4}\sum_i\sum_{\alpha,\beta}\sum_l \Big\{u_\alpha(\vec{R}_i+\vec{R}_l) - u_\alpha(\vec{R}_i)\Big\}\Psi_{\alpha,\beta}(\vec{R}_l)\Big\{u_\beta(\vec{R}_i+\vec{R}_l) - u_\beta(\vec{R}_i)\Big\} \end{aligned} \tag{14.3}$$

<u>Kontinuumslimes:</u>

Veschiebungsfeld: $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{R}_i)$ für $\vec{r} = \vec{R}_i$ und "glatt" dazwischen.

$\vec{u}(\vec{r})$ ändere sich langsam auf atomarer Skala (Reichweite von $\Psi_{\alpha,\beta}(\vec{R}_l)$)

Entwicklung:

$$u_\alpha(\vec{R}_i + \vec{R}_l) = u_\alpha(\vec{R}_i) + \sum_\gamma R^l_\gamma \frac{\partial}{\partial R^i_\gamma} u_\alpha(\vec{R}_i) \tag{14.4}$$

Übergang von $\sum_i \to \frac{1}{\delta v}\int \mathrm{d}^3r$ mit $\delta v = \frac{V}{N}$ = Volumen pro Teilchen.

Dichte: $\rho = \frac{m}{\delta v}$.

Lagrangefunktion (Lagrangedichte)

$$L = \int \mathrm{d}^3r \left\{\tfrac{\rho}{2}\sum_\alpha \dot{u}_\alpha(\vec{r})^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\nabla_\beta u_\alpha(\vec{r})\nabla_\delta u_\gamma(\vec{r})\right\} \tag{14.5}$$

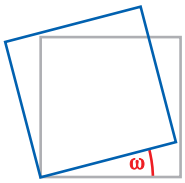
mit "elastischen Konstanten":

$$C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \tfrac{1}{2\,\delta v}\sum_l \Psi_{\alpha,\gamma}(\vec{R}_l)\, R^l_\beta\, R^l_\delta = C_{\gamma,\delta,\alpha,\beta} \tag{14.6}$$

Verzerrungstensor:

$$\nabla_\beta r_\alpha(\vec{r}) = \eta_{\alpha,\beta}(\vec{r}) + \omega_{\alpha,\beta}(\vec{r}) \tag{14.7}$$

mit $\eta_{\alpha,\beta}(\vec{r}) = \eta_{\beta,\alpha}(\vec{r})$ und $\omega_{\alpha,\beta}(\vec{r}) = -\omega_{\beta,\alpha}(\vec{r})$.
Beachte: $\omega_{\alpha,\beta}(\vec{r})$ beschreibt eine lokale Rotation.
Die Potentielle Energie darf für isotrope Wechselwirkung nicht von $\underline{\omega}$ abhängen:



$$C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = C_{\beta,\alpha,\gamma,\delta} = C_{\alpha,\beta,\delta,\gamma} = C_{\beta,\alpha,\delta,\gamma} \tag{14.8}$$

Oberflächenkräfte:
Kraft auf Teilchen i: F^i_α. Potentielle Energie:

$$V_S = -\sum_{i,\alpha}^{S} F^i_\alpha u_\alpha(\vec{R}_i) = -\int_S \mathrm{d}^2 s \sum_\alpha f_\alpha(\vec{s}) u_\alpha(\vec{s}) \tag{14.9}$$

mit "Oberflächenkraftdichte" $\vec{f}(\vec{R}_i) = \frac{1}{\delta s}\vec{F}_i$

Lagrangegleichungen:

Die Lagrangegleichungen werden aus dem Hamiltonschen Prinzip hergeleitet, mit $\delta\vec{u}(\vec{r},t_1) = \delta\vec{u}(\vec{r},t_0) = 0$:

$$\begin{aligned}\delta I(t_1,t_0) = \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\Bigg[\int_V \mathrm{d}^3 r\Big\{\rho\sum_\alpha \dot{u}_\alpha(\vec{r},t)\delta\dot{u}_\alpha(\vec{r},t) \\ - \sum_{\alpha,\beta,\gamma'\delta} C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\nabla_\beta u_\alpha(\vec{r},t)\nabla_\delta \delta u_\gamma(\vec{r},t)\Big\} \\ + \int_S \mathrm{d}^2 s \sum_\alpha f_\alpha(\vec{s})\,\delta u_\alpha(\vec{s},t)\Bigg] = 0\end{aligned} \tag{14.10}$$

Durch partielle Integrationen erreicht mann, daß keine Ableitungen von $\delta u_\alpha(\vec{r},t)$ auftreten. Bei der partiellen Integration mittels Gaussschem Satz erhält man zusätzliche Beiträge zum Oberflächenintegral ($\vec{n}(\vec{s})$ ist nach außen gerichtete Flächennormale):

$$\begin{aligned}\delta I(t_1,t_0) = -\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\Bigg[\int_V \mathrm{d}^3 r\sum_\alpha \delta u_\alpha(\vec{r},t)\Big\{\rho\ddot{u}_\alpha(\vec{r},t) - \sum_\beta \nabla_\beta\sigma_{\alpha,\beta}(\vec{r},t)\Big\} \\ -\int_S \mathrm{d}^2 s\sum_\alpha \delta u_\alpha(\vec{s},t)\Big\{f_\alpha(\vec{s}) - \sum_\beta n_\beta(\vec{s})\sigma_{\alpha,\beta}(\vec{s},t)\Big\}\Bigg] = 0\end{aligned} \tag{14.11}$$

mit dem "Spannungstensor" (Hookesches Gesetz):

$$\sigma_{\alpha,\beta}(\vec{r},t) = \sum_{\gamma,\delta} C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\,\eta_{\gamma,\delta}(\vec{r},t) = \sigma_{\beta,\alpha}(\vec{r},t) \tag{14.12}$$

Bewegungsgleichung: $\delta\vec{u}(\vec{r},t)$:

$$\rho\ddot{u}_\alpha(\vec{r},t) = \sum_{\beta,\gamma,\delta} C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\nabla_\beta\nabla_\delta u_\gamma(\vec{r},t) = \sum_\beta \nabla_\beta\sigma_{\alpha,\beta}(\vec{r},t) \tag{14.13}$$

Randbedingung: $\delta\vec{u}(\vec{s},t)$:

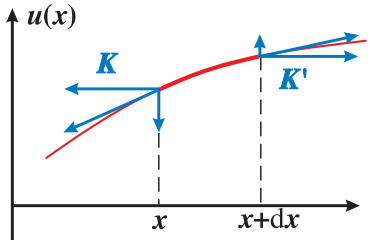
$$\sum_\beta n_\beta(\vec{s})\sigma_{\alpha,\beta}(\vec{s},t) = f_\alpha(\vec{s},t) \tag{14.14}$$

Anmerkung: Isotropes elastisches Medium:

$$C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \lambda\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\gamma,\delta} + \mu\{\delta_{\alpha,\gamma}\delta_{\beta,\delta} + \delta_{\alpha,\delta}\delta_{\beta,\gamma}\}. \tag{14.15}$$

Schwingende Saite, eindimensionales Problem:

Eine ähnliche partielle Differentialgleichung erhält man für eine schwingende Saite. Die Spannung der Saite, i.e. die Kraft, mit der sie gespannt ist, sei konstant. Die Auslenkung $u(x,t)$ sei klein: $u'(x) \ll 1$.



Konstante Spannung bedeutet $K'_x = -K_x = K_0$.

Damit, für kleine Auslenkungen: $K_u \approx -K_0\, u'(x)$ und $K'_u = K_0\, u'(x+\mathrm{d}x)$.

Kraft auf ein kleines Stück der Saite $\mathrm{d}K_y(x) = K'_y + K_y = K_0\, u''(x,t)\,\mathrm{d}x$

Bewegungsgleichung (vergleiche (14.13)):

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t) \qquad c = \sqrt{\frac{K_0}{\rho}} \tag{14.16}$$

<u>Schallwelle in einem elastischen Medium:</u>

Eine identische partielle Differentialgleichung erhält man für die Ausbreitung einer ebenen Schallwelle in einem elastischen Medium unter der Annahme daß $\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}(x,t)$. Dabei ist die Schallgeschwindigkeit $c_L = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ für longitudinale Schallwellen und $c_T = \sqrt{2\mu/\rho}$ für transversale Schallwellen in einem isotropen Medium.

<u>Lösung I (d'Alembert 1747):</u>

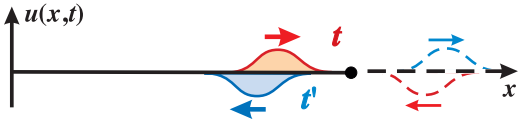
Lösungsansatz:

$$u(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct) \tag{14.17}$$

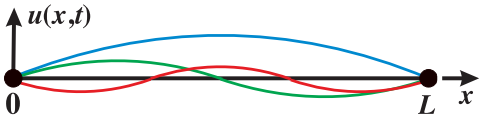
mit beliebigen stetigen Funktionen f_1 und f_2

Randbedingung: $u(x_0,t) = u(x_1,t) = 0$:

Reflexion des Signals mit umgekehrtem Vorzeichen.



<u>Lösung II (Euler 1748):</u>



$$u(x,t) = \sum_k u_k \sin(kx)\cos(\omega_k + \varphi_k) \tag{14.18}$$

mit $\omega_k = c\,k$ und $k = \frac{\pi}{L}\,n$

Harmonische Stimmung (Pythagoras $\sim$ 530 v.Chr.): Grundton $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$; Oktave $\omega_2 = 2\omega_1$; Quinte $\omega_3 = \frac{3}{2}\omega_2$ Quarte $\omega_4 = \frac{4}{3}\omega_3$ große Terze $\omega_5 = \frac{5}{4}\omega_4$ kleine Terze $\omega_6 = \frac{6}{5}\omega_5$ Ganzton $\omega_7 = \frac{9}{8}\omega_6$ Halbton $\omega_8 = \frac{18}{17}\omega_7$.

Temperierte Stimmung: Halbton: $\omega = 2^{1/12}\,\omega'$. Ganzton $\omega = 2^{2/12}\,\omega'$ $\cdots$

21 11.07.03

15 Bewegung starrer Körper

Einen starren Körper können wir als Ansammlung von Massenpunkten i auffassen, deren Massen m_i sind, und deren Koordinaten $\vec{q}_i$ in einem "körperfesten Koordinatensystem" $\hat{\mathcal{S}}$ fest (zeitunabhängig) sind. An geeigneter Stelle können dann Summen über i in Integrale umgewandelt werden:

$$\sum_i \cdots \;\rightarrow\; \int \mathrm{d}^3q\, \rho(\vec{q}) \cdots \tag{15.1}$$

Raumfestes und körperfestes Koordinatensystem:

Wir wollen annehmen, daß sich der starre Körper um einen festen Punkt dreht, und daß dieser Ursprung des raumfesten, wie auch des körperfesten Koordinatensystems ist. Dieser Punkt kann beispielsweise der Schwerpunkt sein.

Die Transformation zwischen raum- und körperfestem Koordinatensystem ist damit eine orthogonale Transformation $\underline{A}(t)$, mit $\underline{A} \cdot \underline{A}^\dagger = \underline{1}$, die die Verkippung der Systeme $\hat{\mathcal{S}}$ und $\mathcal{S}$ beschreibt.

$$\vec{r}_i(t) = \underline{A}(t) \cdot \vec{q}_i \quad \rightarrow \quad \vec{r}(\vec{q}, t) = \underline{A}(t) \cdot \vec{q} \tag{15.2}$$

<u>Bewegung:</u>

$$\dot{\vec{r}}(\vec{q}, t) = \dot{\underline{A}}(t) \cdot \vec{q} \tag{15.3}$$

mit

$$\dot{\underline{A}}(t) = \underline{\Omega}(t) \cdot \underline{A}(t) \tag{15.4}$$

Dabei ist

$$\underline{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{15.5}$$

$\underline{\Omega}$ beschreibt eine Drehung mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ um eine Achse $(\omega_1/\omega, \omega_2/\omega, \omega_3/\omega)$.

Damit wird (15.3)

$$\dot{\vec{r}}(\vec{q}, t) = \underline{\Omega}(t) \cdot \underline{A}(t) \cdot \vec{q} = \underline{\Omega}(t) \cdot \vec{r}(\vec{q}, t) \tag{15.6}$$

<u>Eulersches Theorem:</u>

Auch die orthogonale Transformation $\underline{A} = \underline{A}(\vec{\Phi})$ läßt sich durch einen Vektor $\vec{\Phi}$ beschreiben, wobei $(\Phi_1/\Phi, \Phi_2/\Phi, \Phi_3/\Phi)$ eine Drehachse definiert und $\Phi = \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2}$ einen Drehwinkel. Gebräuchlich ist auch eine Parametrisierung durch Eulerwinkel φ, ϑ und ψ: $\underline{A}(\vec{\Phi}) = \underline{A}(0, 0, \psi) \cdot \underline{A}(\vartheta, 0, 0) \cdot \underline{A}(0, 0, \varphi)$. Der Zusammenhang $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}(\varphi, \vartheta, \psi)$ ist kompliziert und hier nicht von Interesse.

Eulersche Bewegungsgleichungen:

Ausgangspunkt für die Herleitung der Bewegungsgleichungen ist der Drehimpulssatz (3.17) in Gegenwart äußerer Kräfte $\vec{F}_i$

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \qquad \dot{\vec{L}} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M} \tag{15.7}$$

Dabei ist

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i} \to \int \mathrm{d}^3q\, \vec{r}(\vec{q}) \times \vec{f}(\vec{r}(\vec{q})) \tag{15.8}$$

das Drehmoment und $\vec{f}(\vec{r})$ die Kraftdichte. Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen benötigen wir den Zusammenhang zwischen Drehimpuls $\vec{L}$ und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$,wobei wir (9.1) verwenden können:

$$L_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \omega_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \omega_\alpha} \tag{15.9}$$

da die potentielle Energie nicht von $\vec{\omega}$ abhängt.

<u>Kinetische Energie:</u>

Mit (15.6):

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i\, \dot{\vec{r}}_i(t) \cdot \dot{\vec{r}}_i(t) = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \vec{r}_i(t) \cdot \underline{\Omega}^\dagger(t) \cdot \underline{\Omega}(t) \cdot \vec{r}_i(t) \tag{15.10}$$

Mit

$$\underline{\Omega}^\dagger \underline{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_y^2 + \omega_z^2 & -\omega_x\omega_y & -\omega_x\omega_z \\ -\omega_x\omega_y & \omega_x^2 + \omega_z^2 & -\omega_y\omega_z \\ -\omega_x\omega_z & -\omega_y\omega_z & \omega_x^2 + \omega_y^2 \end{pmatrix} = |\vec{\omega}|^2 \underline{1} - \vec{\omega} \otimes \vec{\omega} \tag{15.11}$$

und $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ ist

$$T = \tfrac{1}{2}\, \vec{\omega}(t) \cdot \sum_i m_i \Big(r_i^2\, \underline{1} - \vec{r}_1 \otimes \vec{r}_i \Big) \cdot \vec{\hat{\omega}}(t) = \tfrac{1}{2} \vec{\omega}(t) \cdot \underline{\Theta}(t) \cdot \vec{\omega}(t) \tag{15.12}$$

Dabei ist

$$\underline{\Theta} = \sum_i m_i \Big(r_i^2\, \underline{1} - \vec{r}_i \otimes \vec{r}_i \Big) \tag{15.13}$$

der "Trägheitstensor" im ortsfesten System.

Damit ergibt (15.9)

$$\vec{L}(t) = \underline{\Theta}(t) \cdot \vec{\omega}(t) \tag{15.14}$$

Das Problem ist hier die Berechnung des zeitabhängigen Trägheitstensors.

Im körperfesten System $\hat{\mathcal{S}}$ ist der Trägheitstensor

$$\underline{\hat{\Theta}} = \underline{A}^\dagger(t) \cdot \underline{\Theta}(t) \cdot \underline{A}(t) = \sum_i m_i \Big(q_i^2 \underline{1} - \vec{q}_i \otimes \vec{q}_i \Big) = \int \mathrm{d}^3q\, \rho(q) \Big(q^2 \underline{1} - \vec{q} \otimes \vec{q} \Big) \tag{15.15}$$

Beachte: der Trägheitstensor im körperfesten System ist konstant, der Trägheitstensor im raumfesten System hängt von der Zeit ab.

Mit $\underline{\Theta}(t) = \underline{A}(t) \cdot \underline{\hat{\Theta}} \cdot \underline{A}^\dagger(t)$ und (15.7) erhält man

$$\underline{\Theta}(t) \cdot \dot{\vec{\omega}}(t) + \underline{\Omega}(t) \cdot \underline{\Theta}(t) \cdot \vec{\omega}(t) + \underline{\Theta}(t) \cdot \underline{\Omega}^\dagger(t) \cdot \vec{\omega}(t) = \vec{M}(t) \tag{15.16}$$

Wegen

$$\underline{\Omega} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{a} \tag{15.17}$$

fällt der dritte Term in (15.16) weg und

$$\underline{\Theta}(t) \cdot \dot{\vec{\omega}}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{L}(t) = \vec{M}(t) \tag{15.18}$$

Die Eulerschen Bewegungsgleichungen erhält man durch Transformation dieser Gleichung in das körperfeste System $\hat{\mathcal{S}}$. Mit $\vec{\omega} = \underline{A} \cdot \vec{\hat{\omega}}$ ist

$$\dot{\vec{\omega}} = \underline{\Omega} \cdot \underline{A} \cdot \vec{\hat{\omega}} + \underline{A}\,\dot{\vec{\hat{\omega}}} = \underline{\Omega} \cdot \vec{\omega} + \underline{A}\,\dot{\vec{\hat{\omega}}} = \underline{A}\,\dot{\vec{\hat{\omega}}} \tag{15.19}$$

und mit (15.15) und (15.16) erhält man die Eulersche Gleichung

$$\underline{\hat{\Theta}} \cdot \dot{\vec{\hat{\omega}}}(t) + \vec{\hat{\omega}}(t) \times \Big(\underline{\hat{\Theta}} \cdot \vec{\hat{\omega}}(t)\Big) = \vec{\hat{M}}(t) \tag{15.20}$$

mit dem Drehmoment $\vec{\hat{M}}(t) = \underline{A}^{\dagger}(t) \cdot \vec{M}(t)$ im körperfesten System.

$\underline{\hat{\Theta}}$ ist reell und symmetrisch. Die Eigenwerte (Hauptträgheitsmomente) Θ_1, Θ_2 und Θ_3 sind reell und die Eigenvektoren sind orthogonal. Das körperfeste Koordinatensystem sei so gewählt, daß die Achsen mit den Eigenvektoren zusammenfallen. Damit ist $\underline{\hat{\Theta}}$ diagonal, und die Eulersche Gleichung wird

$$\Theta_\alpha \dot{\hat{\omega}}_\alpha + \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \hat{\omega}_\beta \Theta_\gamma \hat{\omega}_\gamma = \Theta_\alpha \dot{\hat{\omega}}_\alpha - \tfrac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \Big(\Theta_\beta - \Theta_\gamma\Big) \hat{\omega}_\beta \hat{\omega}_\gamma = \hat{M}_\alpha \tag{15.21}$$

Dabei ist $\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} = \epsilon_{\beta,\gamma,\alpha} = -\epsilon_{\alpha,\gamma,\beta} = \cdots$ mit $\epsilon_{1,2,3} = 1$ $\cdots$ das Levy-Civita Symbol (vollständig antisymmetrischer Einheitstensor dritter Stufe).

22 15.07.03

Kräftefreier unsymmetrischer Kreisel:

In diesem Beispiel wird ein starrer Körper untersucht, dessen Hauptträgheitsmomemte alle verschieden sind $\Theta_1 \neq \Theta_2 \neq \Theta_3$. Als Kreisel bezeichnet man eine Situation, in der die Rotationsachse (im körperfesten System) in der Nähe einer der Hauptträgheitsachsen ist, also z.B. $|\hat{\omega}_3| \gg |\hat{\omega}_1|, |\hat{\omega}_2|$. Kräftefrei bedeutet $\vec{M} = 0$. Mit (15.21):

$$\Theta_3 \dot{\hat{\omega}}_3 = \Big(\Theta_1 - \Theta_2\Big)\, \hat{\omega}_1\, \hat{\omega}_2 \approx 0 \qquad\qquad \hat{\omega}_3 = \overline{\omega} \tag{15.22}$$

Für die beiden anderen Komponenten erhält man Gleichungen, die linear in $\hat{\omega}_1$, b.z.w. $\hat{\omega}_2$ sind:

$$\Theta_1 \dot{\hat{\omega}}_1 = \overline{\omega}\Big\{\Theta_2 - \Theta_3\Big\}\hat{\omega}_2 \qquad\qquad \Theta_2 \dot{\hat{\omega}}_2 = -\overline{\omega}\Big\{\Theta_1 - \Theta_3\Big\}\hat{\omega}_1 \tag{15.23}$$

Lösung:

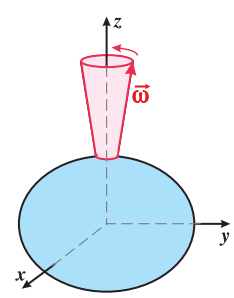
$$\hat{\omega}_1(t) = a \sin(\tilde{\omega} t + \varphi) \qquad\qquad \hat{\omega}_2(t) = b \cos(\tilde{\omega} t + \varphi) \tag{15.24}$$

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_2 - \Theta_3)}{\Theta_1\, \Theta_2}\, \overline{\omega}^2 \qquad\qquad b = \sqrt{\tfrac{\Theta_1(\Theta_1 - \Theta_3)}{\Theta_2(\Theta_2 - \Theta_3)}}\, a \tag{15.25}$$

Für $\Theta_3 > \Theta_1, \Theta_2$ oder $\Theta_3 < \Theta_1, \Theta_2$ ist $\tilde{\omega}^2 > 0$ und damit ist $\tilde{\omega}$ reell. Die Bewegung ist stabil in dem Sinn, daß die momentane Drehachse

$$\frac{\vec{\hat{\omega}}(t)}{\omega(t)} \approx \Big(\frac{\hat{\omega}_1(t)}{\overline{\omega}}, \frac{\hat{\omega}_2(t)}{\overline{\omega}}, 1\Big) \tag{15.26}$$

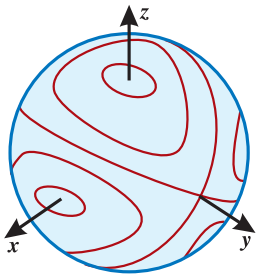
auf einem Kegel um die $\hat{z}$-Achse bewegt (Präzession).



Die Erde ist aufgrund ihrer Rotation an den Polen etwas abgeflacht und die Hauptträgheitsachsen sind etwas verschieden: $\Theta_1 = \Theta_2$ und $(\Theta_1 - \Theta_3)/\Theta_1 \approx 0.0033$. Damit ist die Periode der Präzession etwa 300 Tage. Die Amplitude dieser Bewegung ist sehr klein, sie entspricht etwa 5m, und andere Störungen sind von ähnlicher Größe.

Für $\Theta_1 > \Theta_3 > \Theta_2$ oder $\Theta_1 < \Theta_3 < \Theta_2$ ist $\tilde{\omega}^2 = -\tilde{\gamma}^2 < 0$ und der Lösungsansatz ist

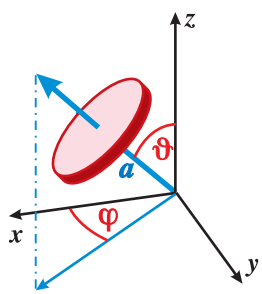
$$\hat{\omega}_1(t) = a\,\mathrm{e}^{\hat{\gamma}t} + a'\,\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}t} \qquad \hat{\omega}_2(t) = b\,\mathrm{e}^{\hat{\gamma}t} + b'\,\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}t} \quad (15.27)$$



Damit ist die Bewegung instabil und die momentane Drehachse entfernt sich von der $\hat{z}$-Achse, und die Bedingung $\overline{\omega} \gg \hat{\omega}_1,\ \hat{\omega}_2$ ist nicht mehr für alle Zeiten erfüllt.

Die Figur zeigt den qualitativen Verlauf von Trajektorien der momentanen Rotationsachse im körperfesten System für $\Theta_1 > \Theta_2 > \Theta_3$

Schwerer symmetrischer Kreisel:



Auf den Kreisel wirkt ein Drehmoment

$$\vec{M} = -mga\,\vec{\hat{\mathrm{e}}}_z \times \vec{\mathrm{e}}_z \qquad (15.28)$$

wobei $\vec{\hat{\mathrm{e}}}_z$ b.z.w. $\vec{\mathrm{e}}_z$ Einheitsvektoren in $\hat{z}$- b.z.w. z-Richtung sind. Damit ist $\hat{M}_z = 0$ und mit (15.21) folgt für den symmetrischen Kreisel (mit $\Theta_1 = \Theta_2$) $\dot{\hat{\omega}}_3 = 0$ und $\hat{\omega}_3 = \overline{\omega}$.

Wir betrachten ein Koordinatensystem $\tilde{\mathcal{S}}$ so daß $\vec{\hat{\mathrm{e}}}_z = \vec{\tilde{\mathrm{e}}}_z$ und so daß $\vec{\tilde{\mathrm{e}}}_x$ in der von $\vec{\hat{\mathrm{e}}}_z$ und $\vec{\mathrm{e}}_z$ aufgespannten Ebene liegt.

Die Vektoren $\vec{\mathrm{e}}_{..}$ sind Einheitsvektoren in den Richtungen der jeweiligen Koordinatenachsen. Die Winkelgeschwindigkeiten in $\tilde{\mathcal{S}}$ können durch $\overline{\omega}$, $\dot{\vartheta}$ und $\dot{\varphi}$ ausgedrückt werden:

$$\overline{\omega} = \dot{\psi} + \cos(\vartheta)\dot{\varphi} \qquad \tilde{\omega}_x = \sin(\vartheta)\dot{\varphi} \qquad \tilde{\omega}_y = \dot{\vartheta} \qquad (15.29)$$

Damit erhält man die Lagrangefunktion

$$L = \tfrac{1}{2}\Theta_3\Big(\dot{\psi} + \cos(\vartheta)\dot{\varphi}\Big)^2 + \tfrac{1}{2}\Theta_1\Big(\sin(\vartheta)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2\Big) - M_0\cos(\vartheta) \qquad (15.30)$$

mit $M_0 = mga$. L hängt nicht von ψ und φ ab, d.h. die zugehörigen kanonischen Impulse sind erhalten:

$$\dot{\psi} + \cos(\vartheta)\dot{\varphi} = \overline{\omega} \qquad \Theta_3\cos(\vartheta)\overline{\omega} + \Theta_1\sin(\vartheta)^2\dot{\varphi} = -c\,\Theta_1 \qquad (15.31)$$

Dies setzt man in die Lagrangefunktion ein:

$$L = \tfrac{1}{2}\Theta_1\dot{\vartheta}^2 + \tfrac{1}{2}\Theta_3\overline{\omega}^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\Theta_1}{\sin(\vartheta)^2}\Big(c + \tfrac{\Theta_3}{\Theta_1}\overline{\omega}\cos(\vartheta)\Big)^2 - M_0\cos(\vartheta) \qquad (15.32)$$

Die Energie ist

$$E = L + 2V = \tfrac{1}{2}\Theta_1\dot{\vartheta}^2 + \tfrac{1}{2}\Theta_3\overline{\omega}^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\Theta_1}{\sin(\vartheta)^2}\Big(c + \tfrac{\Theta_3}{\Theta_1}\overline{\omega}\cos(\vartheta)\Big)^2 + M_0\cos(\vartheta) \quad (15.33)$$

wobei zu beachten ist, daß nur der letzte Term in (15.32) potentielle Energie ist.

Die resultierende Bewegung von ϑ entspricht der eines Teilchens mit Masse Θ_1 in einem effektiven Potential

$$V(\vartheta) = M_0\cos(\vartheta) + \tfrac{1}{2}\frac{\Theta_1}{\sin(\vartheta)^2}\Big(c + \tfrac{\Theta_3}{\Theta_1}\overline{\omega}\cos(\vartheta)\Big)^2 \qquad (15.34)$$

Betrachten wir zunächst die Lösung mit $\dot{\vartheta} = 0$ und $\vartheta(t) = \overline{\vartheta}$.
Aus (15.31) folgt

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{\sin(\overline{\vartheta})^2}\Big(c + \tfrac{\Theta_3}{\Theta_1}\overline{\omega}\cos(\overline{\vartheta})\Big) \tag{15.35}$$

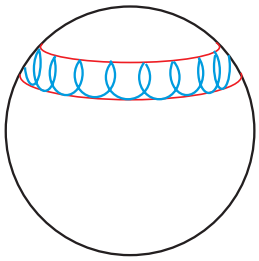
und $\overline{\vartheta}$ ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} V'(\overline{\vartheta}) = 0 &= -M_o\sin(\overline{\vartheta}) - \frac{\Theta_3\overline{\omega}}{\sin(\overline{\vartheta})}\Big(c + \tfrac{\Theta_3}{\Theta_1}\overline{\omega}\cos(\overline{\vartheta})\Big) - \frac{\Theta_1\cos(\overline{\vartheta})}{2\sin(\overline{\vartheta})^3}\Big(c + \tfrac{\Theta_3}{\Theta_1}\overline{\omega}\cos(\overline{\vartheta})\Big)^2 \\ &= -\Big\{M_0 - \Theta_3\overline{\omega}\dot{\varphi} + \tfrac{1}{2}\Theta_1\cos(\overline{\vartheta})\dot{\varphi}^2\Big\}\sin(\overline{\vartheta}) \end{aligned} \tag{15.36}$$

Für $\overline{\omega} \gg |\dot{\varphi}|$ ist

$$\dot{\varphi} = \omega_p = \frac{M_0}{\Theta_3\overline{\omega}} \tag{15.37}$$

d.h. die Achse des Kreisels rotiert mit der Kreisfrequenz ω_p um die z-Achse. Diese Bewegung nennt man Präzession eines Kreisels unter dem Einfluß einer äußeren Kraft.
Beachte: Die Bewegungsrichtung ist senkrecht zu der der angelegten Kraft.



Für $\vartheta(t)$ in der Nähe von $\overline{\vartheta}$ kann man das effektive Potential um $\overline{\vartheta}$ entwickeln und erhält harmonische Schwingungen um $\overline{\vartheta}$, die der Präzessionsbewegung überlagert sind. Diese Bewegung nennt man Nutation, und sie entspricht der vorher untersuchten Präzession des kräftefreien Kreisels.

Aufgrund der Abplattung der Pole und der Gravitationskraft der Sonne wirkt auf die Erde ein Drehmoment. Die daraus resultierende Präzessionsbewegung hat eine Periode von ca. 26 000 Jahren. Die Nutationsbewegung der Erdachse ist vergleichsweise klein und unregelmäßig. Der Präzession des kräftefreien Kreisels entspricht eine Nutationsperiode von ca. 300 Tagen, beobachtet wurden Schwankungen mit einer Periode von ca 400 Tagen. Andere Effekte verursachen ebenfalls Nutationsbewegungen, z.B. die Gravitation des Mondes oder die Tatsache, daß die Erde kein starrer Körper ist.

23 18.07.03

Elektrisch geladener Kreisel im Magnetfeld:

Der Körper sei durch Massenpunkte, die die Ladung Q_i tragen, charakterisiert. Auf jeden dieser Punkte wirkt in einem homogenen Magnetfeld die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_i = \tfrac{Q_i}{c}\vec{v}_i \times \vec{B} \tag{15.38}$$

Damit wirkt auf den Körper ein Drehmoment

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \tfrac{1}{c}\sum_i Q_i\vec{r}_1 \times \Big(\vec{v}_i \times \vec{B}\Big) \\ &= \tfrac{1}{2c}\sum_i Q_i\Big\{\vec{r}_1 \times \Big(\vec{v}_i \times \vec{B}\Big) + \vec{B} \times \Big(\vec{v}_1 \times \vec{r}_i\Big) + \vec{v}_i \times \Big(\vec{r}_i \times \vec{B}\Big)\Big\} \end{aligned} \tag{15.39}$$

Die Summe aus 1. und 3. Term verschwindet, da sie als $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\vec{r}_i \times \Big(\vec{r}_i \times \vec{B}\Big)\Big] = 0$.

Falls die Teilchen alle die gleiche Ladung Q und die gleiche Masse m haben, falls also die Ladungsdichte proportional zur Massendichte ist, erhält man

$$\vec{M} = \frac{Q}{2mc}\,\vec{B} \times \vec{L} = \vec{\omega}_L \times \vec{L} = \dot{\vec{L}} \tag{15.40}$$

und der Kreisel präzediert mit der Larmorfrequenz $\omega_l = \frac{QB}{2mc}$ um die Richtung des Magnetfeldes.

16 Ausblick

Raum und Zeit in der Newtonschen Mechanik:
Euklidischer Raum – absolute Zeit.

Newtonsche Gesetze:
Inertialsysteme. 2. Newtonsches Gesetz: Masse-Kraft-Beschleunigung.
Transformationen zwischen Bezugssystemen.
Beispiele: Keplerproblem, Streuung an einem Zentralpotential.

Verallgemeinerte Koordinaten, Lagrangeformalismus:
Zwangsbedingungen und Zwangskräfte, Tangential- und Normalvektoren.
Lagrangegleichungen erster Art: Kinetische Energie und Tangentialkräfte.
Scheinkräfte in beschleunigten Bezugssystemen.
Potentiale, auch für magnetische Kräfte.
Orte und Geschwindigkeiten als unabhängige Variable.
Lagrangefunktion, Lagrangegleichungen 2.Art.
Hamiltonsches Variationsprinzip.

Kanonische Variable, Hamiltonformalismus:
Kanonische Impulse. Hamiltonsche (kanonische) Bewegungsgleichungen.
Kanonische Transformationen.
Fluß im Phasenraum – Liouvillescher Satz (Statistische Physik).
Formulierung mittels Poissonklammern (Quantenmechanik).
Symmetrien und Erhaltungsgrößen, Noethertheorem.
Integrable Systeme.

Nichtintegrable Systeme, Chaos:
Beispiel: Periodisch angetriebener Rotator.
Empfindliche Abhängigkeit von Anfangsbedingungen, Lyapunov Exponenten.
Begrenzte Vorhersagbarkeit chaotischer Bewegung (Statistische Physik).

Kontinuumsmechanik:
Elastizitätstheorie, schwingende Saite.
Lagrangesche Formulierung einer Feldtheorie (Elektrodynamik, Quantenmechanik)

Bewegung starrer Körper:
Kreiseltheorie.

Hydrodynamik:
Laminare und turbulente Strömungen (Chaos, Wetter).
Magnetohydrodynamik, Plasmaphysik.

Relativistische Mechanik:
Spezielle Relativitätstheorie (Elektrodynamik).
Allgemeine Relativitätstheorie, Kosmologische Fragen.

24 25.07.03

$\mathcal{F}\,\mathcal{I}\,\mathcal{N}\,\mathcal{I}\,\mathcal{S}$

17 Aufgaben

1. Transformationen zwischen kartesischen Koordinatensystemen (3 Punkte)

a) $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ seien kartesische Koordinatensysteme. Ein Punkt $\vec{r}_A$ ist in ihnen durch die Koordinaten $\{x_{A,\alpha}\}$ b.z.w. $\{x'_{A,\alpha}\}$ gegeben. Der Abstand zwischen zwei Punkten ist

$$d_{A,B} = \sqrt{\sum_\alpha \left(x_{A,\alpha} - x_{B,\alpha}\right)^2}.$$

Betrachten Sie die Transformation

$$x'_\alpha = -b_\alpha + \sum_\beta A_{\alpha,\beta}\, x_\beta + \sum_{\beta,\gamma} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, x_\beta\, x_\gamma + \cdots.$$

Welche Einschränkungen an die Parameter b_β, $A_{\alpha,\beta}$ $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ $\cdots$ folgen aus der Forderung, daß die Berechnung des Abstands in beiden Koordinatensysteme die gleichen Werte liefert?

b) Wie transformiert sich das Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ für $\vec{a}\,' = \underline{A} \cdot \vec{a}$ und $\vec{b}\,' = \underline{A} \cdot \vec{b}$, wobei $\underline{A}$ orthogonal sei?
Anmerkung: Das Spatprodukt $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ ist invariant gegenüber Rotationen, es ist gleich dem Volumen des durch die Vektoren $\vec{c}$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespanntem Parallelepipeds.

2. Orthogonale Matrizen (4 Punkte)

a) Zeigen Sie daß $\left(\underline{A} \cdot \underline{B}\right)^\dagger = \underline{B}^\dagger \cdot \underline{A}^\dagger$ ist.

b) Es seien $\underline{A}$ und $\underline{B}$ orthogonal. Zeigen Sie daß $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$ ebenfalls orthogonal ist.

c) Die Matrix

$$\underline{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung um einen Winkel α um die z-Achse. Zeigen Sie daß $\underline{A}(\alpha)$ orthogonal ist.

d) Zeigen Sie daß $\underline{A}(\alpha) \cdot \underline{A}(\alpha') = \underline{A}(\alpha + \alpha')$ ist.

e) Die Matrix

$$\underline{B}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung um einen Winkel β um die x-Achse. Zeigen Sie daß im allgemeinen $\underline{A}(\alpha) \cdot \underline{B}(\beta) \neq \underline{B}(\beta) \cdot \underline{A}(\alpha)$ ist.

3. Nicht gleichzeitige Ereignisse (1 Punkt)

$\mathcal{A} = \{\vec{r}_\mathcal{A}; t_\mathcal{A}\}$ und $\mathcal{B} = \{\vec{r}_\mathcal{B}; t_\mathcal{B}\}$ seien nicht gleichzeitige Ereignisse, i.e. $t_\mathcal{A} \neq t_\mathcal{B}$.
Die Systeme $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ seien durch eine Galileitransformation verknüpft, i.e.

$$x'_\alpha = \sum_\beta A_{\alpha,\beta}\, x_\beta - b_\alpha - u_\alpha\, t$$

Berechnen Sie den Abstand $d_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ in beiden Systemen.

4. Elektrische und magnetische Kräfte (2 Punkte)

Auf ein geladenes Teilchen wirkt eine Kraft

$$\vec{K}(\vec{r}) = q\,\vec{E}(\vec{r}) + \frac{q}{c}\,\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Wie müssen sich elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$ und magnetisches Feld $\vec{B}(\vec{r})$ unter einer Galileitransformation transformieren, damit das Relativitätsprinzip der Newtonschen Mechanik (Invarianz gegenüber Galileitransformationen) gilt?

5. Zentrifugal- und Corioliskraft (3 Punkte)

Es sei $\mathcal{S}$ ein Inertialsystem, $\mathcal{S}'$ ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die gemeinsame z-Achse rotierendes System. Zur Zeit $t = 0$ sei $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$

a) Zeigen Sie daß die Transformation von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}'$ durch $\underline{A}(\alpha(t)) = \underline{A}(-\Omega t)$ gegeben ist, wobei $\underline{A}(\alpha)$ die in Aufgabe 2.a angegebene Form hat.

b) Zeigen Sie daß $\dot{\underline{A}}(\alpha(t)) = \underline{\Omega} \cdot \underline{A}(\alpha(t))$ geschrieben werden kann, und geben Sie $\underline{\Omega}$ an. Es sei $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor. Zeigen Sie daß $\underline{\Omega} \cdot \vec{a} = \vec{\Omega} \times \vec{a}$ geschrieben werden kann, und geben Sie $\vec{\Omega}$ an.

c) In $\mathcal{S}$ gelte die Newtonsche Bewegungsgleichung $m\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$. Zeigen Sie, daß die Bewegungsgleichung in $\mathcal{S}'$ die Form

$$m\,\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}'(\vec{r}') + \vec{F}_z{}' + \vec{F}_c{}' \qquad \text{mit} \qquad \vec{F}'(\vec{r}') = \underline{A}(\alpha) \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

hat, und berechnen sie die Zentrifugalkraft $\vec{F}_z{}'$ und die Corioliskraft $\vec{F}_c{}'$.

d) Das System $\mathcal{S}'$ rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\Omega}|$ um eine gemeinsame Achse in Richtung $\vec{e}_{\vec{\Omega}}$. Versuchen Sie $\vec{F}_z{}'$ und $\vec{F}_c{}'$ für allgemeine $\vec{\Omega}$ anzugeben.

6. Periodische Bewegung (3 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich in einer Dimension in einem Potential

$$V(x) = V_0\,|x|^n$$

a) Berechnen Sie die Schwingungsperiode für $n = -1$, $n = 1$ und $n = 2$ als Funktion der Schwingungsamplitude. Welches Vorzeichen muß V_0 jeweils haben?

b) Wie verhält sich die Schwingungsperiode als Funktion der Schwingungsamplitude für beliebige reelle n? Was ist speziell an $n = 2$?

Hinweis: Integrale, deren Wert nicht von der Amplitude abhängt, müssen nicht berechnet werden. Versuchen Sie die tatsächlich auftretenden Integrale auf solche zurückzuführen.

7. Mathematisches Pendel (3 Punkte)

Die Energie eines mathematisches Pendels (Länge ℓ, Masse m) ist

$$E = \tfrac{1}{2}\,m\,\ell^2\,\dot{\varphi}^2 - m\,g\,\ell\cos(\varphi)$$

Berechnen Sie die Schwingungsperiode für kleine Amplituden in führender Ordnung, sowie die ersten Korrekturen hierzu.

8. Harmonischer Oszillator (4 Punkte)

Berechnen Sie Bahn (3-dimensionaler Raum), Schwingungsperiode, Periheldrehung und Energie eines Teilchens in einem radialsymmetrischen Potential $V(r) = \frac{1}{2} V_0 r^2$ als Funktion von Drehimpuls und Amplitude. Führen Sie die Rechnung sowohl in Polarkoordinaten wie auch in kartesischen Koordinaten durch und vergleichen Sie die Resultate.
Hinweis zur Rechnung in Polarkoordinaten: Es könnte zweckmäßig sein, die Umkehrpunkte in der Form $r_{1,0}^2 = \frac{E}{V_0}(1 \pm \eta)$ zu parametrisiern und an geeigneter Stelle $x = \frac{E}{V_0 r^2}$ als Integrationsvariable einzuführen.

9. Müllprobleme im All (3+2* Punkte)

Ein Astronaut bewegt sich auf einer Kreisbahn um die Erde. Er wirft eine leergetrunkene Bierflasche weg, und zwar senkrecht zu seiner Umlaufbahn weg von der Erde. Ist er den Müll damit losgeworden oder bekommt er die leere Flasche zurück um den Flaschenpfand einzulösen? Wie lange muß er warten, falls die Flasche zurückkommt? Diskutieren Sie die Bahn der Bierflasche unter der Annahme, daß die Relativgeschwindigkeit zwischen Astronaut und Bierflasche klein ist gegenüber der Bahngeschwindigkeit des Astronauten. Diskutieren Sie auch die Möglichkeit, die Flasche nach hinten zu werfen. Anmerkung: Viele Wege führen nach Rom! (Für den ersten Weg gibt es 3 Punkte, für jeden weiteren 2 Extrapunkte)

10. Streuung an einem Potentialtopf (3 Punkte)

Berechnen Sie den differentiellen Streuquerschnitt für die Streuung eines Teilchens mit Masse m und Energie E an einem Potentialtopf mit

$$V(r) = -V_0 \quad \text{für} \quad r < a \qquad \text{und} \qquad V(r) = 0 \quad \text{für} \quad r > a\,.$$

11. Ende eines Kometen. (3 Punkte)

Am 16. Juli 1994 kollidierte der Komet Shoemaker-Levy mit dem Jupiter (siehe http://www.physics.sfasu.edu/astro/sl9.html). Kollisionen von Meteoriten mit Planeten kommen häufig vor. Bei der Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts für eine Kollision ist zu berücksichtigen, daß die Bahn des Kometen zum Planeten hingezogen wird. Eine Kollision findet also statt, wenn das Perihel innerhalb des Planeten ist. Dadurch wird der Wirkungsquerschnitt für Kollision größer als der geometrische Querschnitt des Planeten. Berechnen Sie den Wirkungsquerschnitt, und diskutieren Sie, von welchen Parametern das Verhältnis von Wirkungsquerschnitt zu geometrischem Querschnitt abhängt. Versuchen Sie dabei die asymptotische Geschwindigkeit des Kometen v_0 mit der Fluchtgeschwindigkeit v_c für den Planeten in Verbindung zu bringen. (Die Fluchtgeschwindigkeit ist die minimale Anfangsgeschwindigkeit, die notwendig ist, um einen Satelliten aus dem Anziehungsbereich des Planeten zu entfernen.)

12. Das Problem eine Kokosnuß zu kämmen. (4 Punkte)

Eine Kokosnuß hat Haare (Fasern) auf ihrer Oberfläche, die flach anliegen, also als Tangentialvektoren angesehen werden können. Kämmt man diese Haare glatt, erhält man Tangentialvektoren, deren Richtung sich stetig als Funktion des Ortes auf der Oberfläche ändert. Können sie eine Kokosnuß überall gleichzeitig glatt kämmen?

Hinweis: Betrachten Sie eine Schar geschlossener, glatter und sich nicht schneidender Kurven $\mathcal{C}(\lambda)$ die die Oberfläche vollständig bedecken. Wählen Sie die Tangentialvektoren so, daß einer gleichzeitig Tangentialvektor an eine der Kurven ist, der andere senkecht dazu steht. An zwei Punkten auf der Oberfläche (Polen) degenerieren die Kurven $\mathcal{C}(\lambda)$ zu Punkten. Wie verhalten sich die Tangentialvektoren in der Nähe dieser Pole. Sind die in der Vorlesung diskutierten Kriterien für Tangentialvektoren erfüllt?

Könnten Sie eine Kokosnuß mit Loch (Torus) glatt kämmen? Was ist der wesentliche Unterschied in Hinblick auf die angegebene Konstruktion?

13. Achterbahnfahren. (3 Punkte)

Die Wagen einer Achterbahn seien durch Massenpunkte, die sich reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft entlang einer Kurve $\vec{r}(\ell)$ bewegen, idealisiert. Dabei ist ℓ die zurückgelegte Strecke. Geben Sie die Lagrangefunktion und die resultierende Bewegungsgleichung an. Leiten Sie auch eine Bewegungsgleichung aus dem Energiesatz her und vergleichen Sie die beiden Gleichungen. Sind Zwangskräfte dabei zu berücksichtigen? Begründen sie dies.

14. Achterbahn mit Looping. (4+1* Punkte)

Die Wagen einer Achterbahn bewegen sich reibungsfrei entlang einer Kurve $\vec{r}(\ell)$, wobei ℓ die zurückgelegte Strecke ist (siehe Aufgabe 13).

a) Wieviele Tangentialvektoren gibt es in jedem Punkt der Kurve, wodurch sind sie bestimmt, welche Länge haben sie? (1 P)

b) Wieviele linear unabhängige Normalenvektoren gibt es in jedem Punkt, wie können diese berechnet werden? (1 Extrapunkt)

c) Wie ändert/n sich der/die Tangentialvektor/en wenn man eine Strecke $\delta\ell$ entlang der Kurve fortschreitet, welche Richtung hat die Änderung? (1 P)

d) In der Achterbahn ist ein Looping in Form eines vertikal stehenden Kreises mit Radius R eingebaut. Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muß der Wagen in den Looping an seinem tiefsten Punkt einfahren, damit er nicht vor Erreichen des höchsten Punktes stehenbleibt (Der Wagen ist mit Doppelrollen ausgestattet, so daß er nicht aus den Schienen springen kann). (1 P)

e) Mit welcher Geschwindigkeit v_1 muß der Wagen mindestens einfahren, damit die Fahrgäste nicht aus dem offenen Wagen fallen, welche Beschleunigung spüren sie entlang des Loopings (in Vielfachen der Erdbeschleunigung) für Anfangsgeschwindigkeit v_1? Welcher Typ von Zwangsbedingungen gilt für die Fahrgäste (Die Achterbahn wurde nicht vom TÜV abgenommen)? (1P)

15. Hall-Effekt. (3 Punkte)

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung e bewegt sich in der x-y-Ebene unter dem Einfluß eines konstanten elektrischen Feldes $\vec{E} = (0, E, 0)$ und eines konstanten Magnetfeldes $\vec{B} = (0, 0, B)$.

a) Geben Sie das verallgemeinerte Potential U und die Lagrangefunktion für verschiedene Eichungen an. (1 P)

b) Zeigen Sie daß die Bewegung aus der Überlagerung einer Kreisbewegung in der x-y-Ebene und einer konstanten Drift in x-Richtung mit Geschwindigkeit u besteht. Berechnen Sie die Umlaufperiode und die Driftgeschwindigkeit. (1 P)

c) Betrachten sie ein gleichförmig bewegtes Koordinatensystem $\mathcal{S}'$ mit Koordinaten

$x'_\alpha = x_\alpha - v_\alpha t$. Geben Sie verallgemeinertes Potential und Lagrangefunktion im bewegten System an und berechnen Sie die Kraft. Diskutieren Sie speziell den Fall $\vec{v} = (u, 0, 0)$. (1 P)

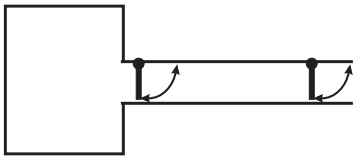
16. Schwerkraft-U-Bahn (Brachistochrone). (3 Punkte)

Eine U-Bahn ohne Antrieb soll von A nach B gebaut werden. Dabei soll die Strecke von A aus zunächst abfallen, wobei die Wagen durch die Schwerkraft beschleunigt werden, dann wieder bis zur Station B ansteigen, so daß die Wagen dort wieder zur Ruhe kommen. A und B seien auf gleicher Höhe. Reibung sei vernachlässigbar. In welcher Tiefe $z(x)$ muß die Strecke verlaufen, damit die Strecke in möglichst kurzer Zeit durchfahren wird.

a) Berechnen Sie zunächst $v_x(x)$ bei vorgegebenem $z(x)$ und betrachten Sie das Funktional $I(z) = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x/v_x(x)$. Bestimmen Sie die Eulersche Differentialgleichung aus $\delta I(z) = 0$. (2 P)

b) Zeigen Sie daß $x \sim \varphi - \sin(\varphi)$; $z \sim 1 - \cos(\varphi)$ (Parameterdarstellung einer Zykloide) Lösung ist . (1 P)

17. Laufzeitmonochromator. (4 Punkte)



Ein Ofen hat eine Öffnung, die mit zwei hintereinander angeordneten Verschlüssen versehen ist. Durch geeignetes Öffnen und Schließen wird ein Puls von Teilchen präpariert. Die Teilchen haben eine Masse m und eine mittlere Geschwindigkeit v_0 mit einer Genauigkeit Δv_0. Die Verschlüsse waren jeweils für eine Zeit Δt geöffnet. Der zweite Verschluss am Ort $x = 0$ war zwischen $t = -\Delta t$ und $t = 0$ geöffnet.

a) Welches Volumen im Phasenraum enthält die Teilchen zur Zeit $t = 0$ (berücksichtigen Sie nur die Bewegung in x-Richtung). Dabei sei das tatsächliche Volumen durch ein Rechteck angenähert. Welches Volumen im Phasenraum enthält die Teilchen zu einem späteren Zeitpunkt t_1? Die Teilchen bewegen sich kräftefrei, Δv_0 und Δt kann als klein angenommen werden.

b) Die Teilchen werden durch Durchlaufen einer Potentialstufe beschleunigt. Das Potential sei $V(x < x_0) = 0$ und $V(x > x_0) = -V_0$. Berechnen Sie Δx, Δv, Δt und ΔE, nachdem die Teilchen beschleunigt wurden. Ist der Liouville-Satz erfüllt?

c) Welche Form hat das Volumen im Phasenraum zur Zeit $t = 0$ tatsächlich. Versuchen Sie die Wirkung des ersten und des zweiten Verschlusses qualitativ im Phasenraum darzustellen.

18. Eistütchen. (3 Punkte)

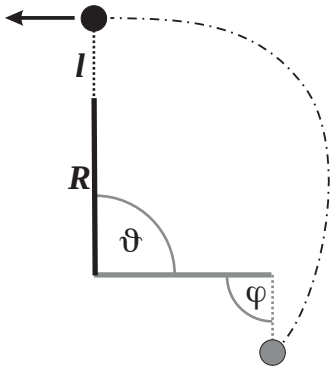
Eine punktförmig angenommene Eiskugel bewegt sich reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft in einer Eiswaffel, die als nach oben offener Kreiskegel mit Öffnungswinkel α und Achse in z-Richtung angenommen wird.

a) Wieviel Freiheitsgrade hat das hier betrachtete Problem, wenn man annimmt, daß die Eiskugel sich am Anfang auf der Eiswaffel bewegt hat. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.

b) Welche Erhaltungssätze gelten? Vereinfachen Sie die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Erhaltungssätze. Ist das System integrabel?

c) Die Achse sei gegenüber der Vertikalen um einen Winkel β geneigt. Diskutieren Sie wieder die unter a) und b) gestellten Fragen. Gibt es Unterschiede zwischen $\alpha > \beta$ und $\alpha < \beta$, falls ja, welche?

19. Römische Steinschleuder. (3 Punkte)



Bereits im Altertum wurden Steinschleudern nach dem gezeigten Prinzip verwendet. An einem drehbaren Balken der Länge R ist mit einem Seil der Länge l ein Stein befestigt, der bei Erreichen der Endstellung ausgelöst wird. Anfangskonfiguration sei, wie gezeigt, $\vartheta(0) = 0$ und $\varphi(0) = \frac{1}{2}\pi$. Der Balken wird so bewegt, daß $\vartheta(t) = \frac{1}{2}\,b\,t^2$. Der Einfluß der Schwerkraft sei vernachlässigbar, ebenso die Masse des Seils.

a) Berechnen Sie die Lagrangefunktion und leiten Sie die Bewegungsgleichung her.

b) Diskutieren Sie die Lösung qualitativ. (Hinweis: Es ist vielleicht einfacher an geeigneter Stelle $\psi = \varphi + \vartheta$ als neue Variable einzuführen).

20. Planetenschleuder - Kometenfalle. (4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll untersucht werden, inwieweit interplanetare Satelliten durch Vorbeiflug an Planeten zusätzliche Energie gewinnen können. Durch den inversen Prozess können Kometen im Sonnensystem eingefangen werden.

a) Eine Kanonische Transformation sei durch die Erzeugende $G(q,P,t) = \sum_\alpha f_\alpha(q,t)\Big(P_\alpha + \overline{P}_\alpha(t)\Big)$ gegeben ($\alpha = 1\cdots 3$). Wie muß $f_\alpha(q,t)$ und $\overline{P}_\alpha(t)$ gewählt werden, damit die Transformation eine Galileitransformation (ohne Drehung) ist. Wie transformiert sich die Energie?

b) Während des Vorbeifluges des Satelliten an einem der Planeten kann dessen Bewegung als gleichförmig geradlinig angesehen werden. Das ursprüngliche Inertialsystem $\mathcal{S}$ sei bezüglich Sonne und Fixsternen fixiert. Das transformierte System $\mathcal{S}'$ sei das Ruhesystem des Planeten. Bestimmen Sie $G(q,P,t)$ und gebe Sie an, wie sich die Hamiltonfunktion transformiert.

c) Im großen Abstand vom Planeten kann auch die Bewegung des Satelliten als geradlinig gleichförmig angenommen werden. Der Impuls sei vor dem Vorbeiflug $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$ b.z.w. $\vec{P}_0 = m\vec{V}_0$, nach dem Vorbeiflug $\vec{p} = m\vec{v}$ b.z.w. $\vec{P} = m\vec{V}$. Welche Bedingung muß $\vec{P}$ erfüllen? Wie ändert sich die Energie des Satelliten?

d) Wie muß die Bahn des Satelliten gewählt werden, damit er möglichst viel Energie gewinnt? Welche Geschwindigkeit kann er maximal erreichen (bei gegebener Geschwindigkeit v_0 und U)?

21. Rakete. (3 Punkte)

Eine Rakete wird durch einen Gasstrahl angetrieben, der an ihrem Ende mit einer Relativgeschwindigkeit v_0 austritt. Die Masse der pro Zeiteinheit austretenden Gase sei μ. Da die Gase aus dem mitgeführtem Treibstoff stammen, verändert sich die Masse m der Rakete entsprechend. Leiten Sie die Bewegungsgleichung der Rakete unter Vernachlässigung von Reibung und Schwerkraft

a) aus dem Energiesatz, b) aus dem Impulssatz her.

c) Integrieren Sie die Bewegungsgleichung mit der Anfangsbedingung $m(0) = m_0$ und $v(0) = 0$. Wieviel Treibstoff hat die Rakete verbraucht, bis sie die Geschwindigkeit $v = v_0$ erreicht hat, wieviel, bis sie $v = 5\,v_0$ erreicht hat?

22. Näherungslösung mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips. (3+2* Punkte)

Die Bewegungsgleichung eines Teilchens sei

$$m\ddot{x} + m\Omega^2 x + cx^3 = F_0 \sin(\omega t)$$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Lagrangefunktion L.

b) Betrachten Sie den Näherungsansatz

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t)$$

und berechnen Sie damit

$$I = \int_0^\tau \mathrm{d}t\, L\Big(x(t), \dot{x}(t), t\Big).$$

Bestimmen Sie die Amplitude x_0 aus dem Hamiltonschen Prinzip. Wählen Sie τ so daß $\delta x(\tau) = 0$. Eine qualitative Diskussion der Lösung genügt.

c) Betrachten Sie den Fall $F_0 = 0$ und bestimmen Sie ω als Funktion der Amplitude x_0 ebenfalls aus dem Hamiltonschen Prinzip, wieder mit τ so daß $\delta x(\tau) = 0$. Welche physikalische Situation wird durch b) b.z.w. c) beschrieben (nur Stichworte)?

23. Magnetische Fallen und Polarlichter (5 Punkte)

Geladene Teilchen können durch inhomogene Magnetfelder eingesperrt werden. Dies spielt auch bei der Entstehung von Polarlichtern eine Rolle, da dabei Elektronen, die im Magnetfeld der Erde gefangen sind in der Nähe der Pole in die obere Atmosphäre gelangen und dort Leuchterscheinungen hervorrufen.

a) Zeigen Sie, daß ein zylindersymmetrisches Magnetfeld durch ein Vektorpotential $\vec{A} = \frac{1}{2}\rho B_z(z)\vec{e}_\varphi(\varphi)$ gegeben ist, wobei $\vec{e}_\varphi(\varphi) = (-\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$ ein Einheitsvektor in φ-Richtung (Zylinderkoordinaten) sei. Berechnen Sie die Komponenten des Magnetfeldes in Zylinderkoordinaten B_ρ, B_φ und B_z, und zeigen Sie daß $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ gilt.

b) Die Ortskoordinanten in Zylinderkoordinaten sind ρ, φ und z. Berechnen Sie die Lagrangefunktion und die kanonischen Impulse p_ρ, p_φ und p_z sowie die Hamiltonfunktion.

c) Welche Größen sind erhalten?

d) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für p_ρ her. Bestimmen Sie ρ aus der Anfangsbedingung $p_\rho = \dot{p}_\rho = 0$ und $\dot{\varphi} \neq 0$ für einen vorgegeben Wert von p_φ. Berechnen Sie die Energie unter der Annahme, daß $\rho(t)$ immer durch die Bedingung $\dot{p}_\rho = 0$ gegeben ist. Diskutieren Sie speziell $B_z(z) = B_0 + \frac{1}{2}B''z^2$.

24. Lenzscher Vektor (2 Punkte)

Der Lenzsche Vektor ist eine Erhaltungsgröße für die Bewegung eines Teilchens in einem Gravitations- oder Coulombpotential. Er ist gegeben durch

$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} + m\,V(r)\,\vec{r}$ mit $V(r) = \gamma/r$.

Zeigen Sie daß $\Big\{\vec{A}, H\Big\} = 0$ für $H = \frac{1}{2m}p^2 + V(r)$.

Für die Rechnung ist es vorteilhaft zunächst eine Produktregel für $\{A, BC\}$ herzuleiten, tun Sie dies.

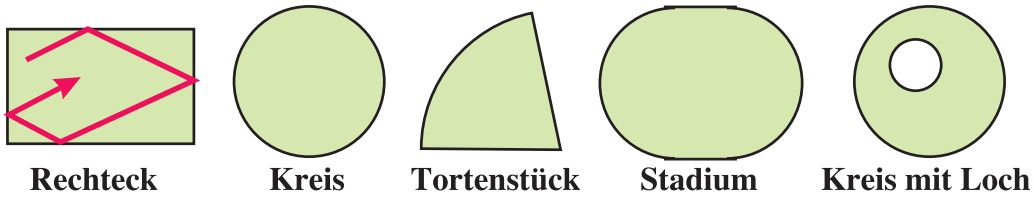
25. Anisotroper harmonischer Oszillator (3 Punkte)

Das Potential eines Teilchens, welches sich in der x-y-Ebene bewegen kann sei $V(x,y) = \frac{1}{2}\Big\{a\,x^2 + b\,y^2 + 2c\,xy\Big\}$. Versuchen Sie eine kanonische Transformation auf neue Orte X, Y und Impulse P_X, P_Y so zu finden, daß in der transformierten

Hamiltonfunktion $K(P_X, P_Y, X, Y)$ keine gemischten Terme $\sim XY$ oder $\sim P_X P_Y$ auftreten. Welche Erhaltungsgrößen existieren? Ist das System integrabel? Welche Bedingungen an die Koeffizienten a, b und c ergeben sich aus der Forderung, daß das Teilchen sich nicht beliebig weit von dem Ursprung entfernen kann. Geben Sie die allgemeine Lösung an, auch für den Fall, daß die genannte Bedingung verletzt ist.

26. Mathematisches Billard (3+2* Punkte)

Ein Teilchen bewegt sich reibungsfrei in einen Ebene innerhalb eines berandeten Gebiets. Am Rand wird es ideal reflektiert. Betrachten Sie folgende Gebiete:



Ist die Bewegung in den jeweiligen Gebieten integrabel? Versuchen Sie Erhaltungsgrößen zu finden und erleutern sie diese kurz. Für das Beispiel "Kreis mit Loch" gibt es Extrapunkte.

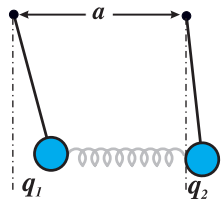
27. Translationsinvarianz in harmonischer Näherung (2 Punkte)

Betrachten Sie N Teilchen mit unterschiedlichen Massen, deren Wechselwirkung durch abstandsabhängige Paarwechselwirkungen gegeben ist:

$$V(\{q\}) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} V_{i,j}(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|)$$

Welche Konsequenzen ergeben sich aus der Translationsinvarianz für die Entwicklungskoeffizienten $\Phi_{i,\alpha;j,\beta}$ und $\hat{\Phi}_{i,\alpha;j,\beta}$?

28. Gekoppelte Pendel, Schwebungen (5 Punkte)



Zwei Pendel (Masse m_1 und m_2) sind durch eine schwache Feder gekoppelt. Ohne Feder würden sie mit Frequenzen Ω_1 b.z.w. Ω_2 schwingen. Der Abstand der Aufhängepunkte sei a, die Auslenkungen q_1 b.z.w. q_2 seien so klein, daß die harmonische Näherung zur Behandlung ausreicht. Die Kraft der Feder sei $F_1 = -F_2 = \kappa\,(a - q_1 + q_2)$ mit $\kappa > 0$.

a) Konstruieren Sie die Hamiltonfunktion und berechnen Sie die Gleichgewichtslagen für kleine κ (für $\kappa = 0$: $\overline{q}_1 = \overline{q}_2 = 0$).

b) Geben Sie die Hamiltonfunktion als Funktion der neuen Auslenkungen an. Berechnen Sie die Eigenfrequenzen.

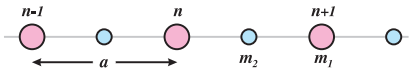
c) Diskutieren Sie speziell $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$. Berechnen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren sowie die zugehörigen Auslenkungen.

d) Zur Zeit $t = 0$ sei die Auslenkung des linken Pendels aus der neuen Ruhelage $u_1(0) = u_0$, die des rechten Pendels $u_2(0) = 0$ und $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = 0$. Berechnen Sie $u_1(t)$ und $u_2(t)$ für $\Omega_1 = \Omega_2$ und $m_1 = m_2 = m$.

e) Diskutieren Sie $\omega_\pm$ als Funktion von Ω_2 für vorgegebene Werte von Ω_1 und κ und $m_1 = m_2 = m$. Skizzieren Sie den Verlauf.

29. Zweiatomige lineare Kette (4* Punkte)

Berechnen Sie das Spektrum einer zweiatomigen linearen Kette mit Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn in harmonischer Näherung für longitudinale Schwingungen.



Die Gitterplätze sind alternierend mit Atomen der Masse m_l mit $l = \{1, 2\}$ besetzt.

Untersuchen Sie den Ansatz $u_{l,n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k u_{l,k}\, \mathrm{e}^{ikR_{l,n}}$ und $p_{l,n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k p_{l,k}\, \mathrm{e}^{ikR_{l,n}}$.

Welche Wellenvektoren sind physikalisch sinnvoll (periodische Randbedingungen)? Skizzieren Sie das Spektrum.

30. Trommel (3* Punkte)

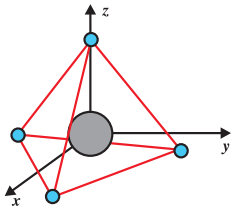
Für die Schwingungen einer Trommel findet man die partielle Differentialgleichung

$$\ddot{u}(x, y, t) = c^2 \Big\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big\} u(x, y, t)$$

mit ähnlichen Argumenten wie für die schwingende Saite. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen für eine rechteckige Trommel ($x = 0 \cdots L$ und $y = 0 \cdots L'$). Untersuchen Sie dazu einen Separationsansatz $u(x, y, t) = v(x)\, w(y)\, \cos(\omega t + \varphi)$.
Berechnen Sie die Grundfreqenz und die Obertöne als Vielfache der Grundfrequenz. Ist das Spektrum der Eigenschwingungen (Obertöne) harmonisch?

31. Trägheitsmomente (3* Punkte)

Berechnen Sie die Trägheitsmomente in einem geeignetem körperfesten Koordinatensystem für folgende Gegenstände:

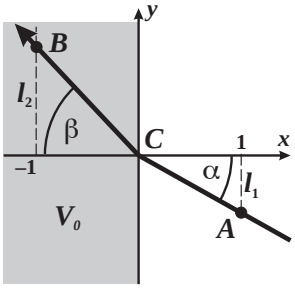


a) Methanmolekül: Trägheitsmoment bezogen auf den Schwerpunkt. Das Methanmolekül besteht aus 4 Wasserstoffatomen, die einen regulären Tetraeder formen, und einem Kohlenstoffatom im Zentrum des Tetraeders.

b) Kreiszylinder mit Radius R und Länge L, wieder bezogen auf den Schwerpunkt. Der Zylinder sei homogen mit einem Material konstanter Dichte gefüllt.

c) Kreisel (siehe Figur). Berechnen Sie das Trägheitsmoment sowohl bezüglich des Schwerpunktes, wie auch bezüglich des Auflagepunktes. Die Scheibe des Kreisels sei beliebig dünn, die Masse der Achse sei vernachlässigbar.

32. Überwindung einer Potentialstufe. I (10 Punkte)



Ein Teilchen mit Masse m bewegt sich reibungsfrei in der x-y-Ebene. Das Potential ist $V = 0$ für $x > 0$ und $V = V_0 > 0$ für $x < 0$. Die Bahn ist für $x > 0$ unter einem Winkel α geneigt. Das Teilchen hat eine Anfangsgeschwindigkeit u_0.

a) Welche Größen sind Erhaltungsgrößen? Welches sind die dabei zugrundeliegenden Symmetrien? (3 Punkte)

b) Welche Geschwindigkeit u_1 hat das Teilchen für $x < 0$?

Unter welchem Winkel β ($\sin(\beta)$) verläuft die Bahn für $x < 0$? Zeichnen Sie qualitativ $\sin(\beta)$ als Funktion von $\sin(\alpha)$. (3 Punkte)

c) Welche Werte kann α bei vorgegebenem u_0 annehmen damit das Teilchen überhaupt die Potentialstufe überwindet? (2 Punkte)

d) Welche Geschwindigkeit $u_{\min}$ muß das Teilchen bei vorgegebenem α mindestens haben, damit es die Potentalstufe übrwindet, was passiert für $u_0 < u_{\min}$? (2 Punkte)

33. Überwindung einer Potentialstufe. II: Variationsverfahren (10 Punkte)

In dieser Aufgabe soll das Hamiltonprinzip angewandt auf den Hamiltonformalismus für das in Aufgabe 1 behandelte Problem untersucht werden. Dazu betrachten Sie das Wirkungsintegral

$$I(p,q) = \int_0^t \mathrm{d}t' \Big\{ \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(p,q) \Big\}$$

und dessen Variation $\delta I(p,q)$ bei festgehaltenen Werten von $\vec{q}(0) = \vec{q}_A = (1,0,0)$ und $\vec{q}(t) = \vec{q}_B = (-1,l,0)$.
Der Punkt C sei zur Zeit t_1 erreicht, also $\vec{q}(t_1) = \vec{q}_C = (0,l_1,0)$.

a) Welchen Wert hat $I(p,q)$ unter der Annahme, daß $\vec{p}(t < t_1) = \vec{p}_1$, $\vec{p}(t > t_1) = \vec{p}_2$, $\dot{\vec{q}}(t < t_1) = \vec{u}_1$ und $\dot{\vec{q}}(t > t_1) = \vec{u}_2$. Dabei sei $|\vec{u}_1|$ und $|\vec{u}_1|$ als Funktion von l_1 und t_1 b.z.w. $l_2 = l - l_1$ und $t_2 = t = t_1$ gegeben. (4 Punkte)

b) Betrachten Sie $\delta I(p,q) = 0$ für beliebige $\delta\vec{p}_{1,2}$. Was ergibt sich daraus? (2 Punkte)

c) Betrachten Sie $\delta I(p,q) = 0$ für $\delta l_2 = -\delta l_1$. Was ergibt sich daraus? (2 Punkte)

d) Betrachten Sie $\delta I(p,q) = 0$ für $\delta t_2 = -\delta t_1$. Was ergibt sich daraus? (2 Punkte)

34. Eistänzerprobleme. (10 Punkte)

Ein(e) Eistänzer(in) tanzt eine Pirouette. Dieser Sachverhalt sei durch zwei gleiche gegenüberliegende Massen $\frac{1}{2}m$ im Abstand ℓ_0 von einer Drehachse in z-Richtung angenähert. Er(sie) dreht sich anfangs mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0. Nun zieht er(sie) langsam seine(ihre) Arme an, so daß die betrachteten Massen den Abstand ℓ_1 haben.

a) Gibt es Erhaltungsgrößen, die für die betrachtete Situation wichtig sind, falls ja welche? (2 Punkte)

b) Welche Kraft muß er(sie) aufbringen? Geben Sie die Kraft für beliebige l an. (2 Punkte)

c) Welche Arbeit muß er(sie) leisten? Wie verhält sich die Energie? (3 Punkte)

d) Betrachten Sie die Situation von System $\mathcal{S}'$ aus, welches mit Winkelgeschwindigkeit ω_0 um die z-Achse rotiert. Von $\mathcal{S}'$ aus gesehen erscheinen die beiden Massen zunächst in Ruhe. Werden diese nun nach innen gezogen, beschleunigt sich die Winkelgeschwindigkeit, und von $\mathcal{S}'$ aus gesehen bewegt sich der(die) Eisläufer(in) mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega(l) - \omega_0$, er(sie) wurde also beschleunigt. Welche Kraft ist dafür verantwortlich? (Keine Rechnung, nur qualitative Diskussion!) (3 Punkte)

35. Geladenes Teilchen im Magnetfeld. (10 Punkte)

Ein Teilchen mit Masse m trägt eine elektrische Ladung e. Es bewegt sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$.

a) Geben Sie das zugehörige Vektorpotential $\vec{A}$ an. Verwenden Sie eine Eichung so daß die Komponente $A_z = 0$ ist und die beiden anderen Komponenten linear von den Ortskoordinaten abhängen. Welche Freiheit bleibt dann für die Wahl von $\vec{A}$? (Formelsammlung: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$) (2 Punkte)

b) Geben Sie die zugehörige Lagrangefunktion an. Es empfielt sich das Magnetfeld durch die Zyklotronfrequenz $\omega_c = \frac{e}{mc} B$ auszudrücken.
(Formelsammlung: $U = -\frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}$) (2 Punkte)

c) Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen her. (2 Punkte)

d) Geben Sie die zugehörigen kanonischen Impulse und die Hamiltonfunktion an. (2 Punkte)

e) Zeigen Sie daß die Energie erhalten ist. (2 Punkte)

36. Kräfte, Potentiale und Erhaltungsgrößen (10 Punkte)

Gegeben seien folgende Kraftfelder (in kartesischen Koordinaten):

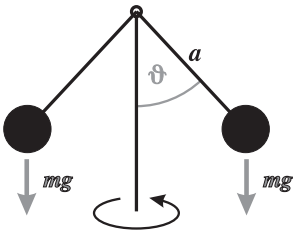
a) $\vec{F}_a = \Big(f(x,t), g(y,t), h(z,t)\Big)$
b) $\vec{F}_b = f(|\vec{r}|)\,\vec{r}$
c) $\vec{F}_c = \vec{e}_z \times \vec{r}\, f(|\vec{r}|)$ $\quad \vec{e}_z$ ist ein Einheitsvektor in z-Richtung.
d) $\vec{F}_d = \Big(x f(x^2+y^2), y f(x^2+y^2), g(z)\Big)$
e) $\vec{F}_e = \Big(x f(x^2+y^2), y f(x^2+y^2), 0\Big)$

In den jeweiligen Kraftfeldern bewegt sich ein Teilchen. Wenn z.B. $f(x,t)$ angegeben ist, ist immer eine allgemeine stetige Funktion gemeint.
Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem $\times$ wenn die Aussage in der jeweiligen Zeile für die Kraft in der zugehörigen Spalte zutrifft, mit 0 wenn sie nicht zutrifft, markieren Sie das Kästchen nicht, wenn Sie unentschieden sind.
Für jede richtige Antwort gibt es 0.4 Punkte, für jede falsche Antwort -0.4 Punkte. Falls Sie mehr falsche als richtige Antworten haben, gibt es insgesamt 0 Punkte. Die Antworten müssen nicht begründet werden.

(Wenn Sie noch etwas korrigieren wollen)

F_a	F_b	F_c	F_d	F_e		F_a	F_b	F_c	F_d	F_e
					Die Kraft besitzt ein Potential					
					Die Energie ist erhalten					
					Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist erhalten					
					Die $z-$Komponente L_z ist erhalten					
					Das System ist integrabel					

37. Drehkraftregler (10 Punkte)



Zur Regulierung der Drehgeschwindigkeit von Dampfmaschinen wurden früher Geräte der gezeigten Art verwendet. Das Gerät rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω um die z-Achse. Entsprechend der Drehgeschwindigkeit ändert sich der Winkel ϑ, was zur Regelung der Dampfzufuhr (durch nicht gezeigte Bauteile) führt.
Die Kugeln werden als punktförmig angesehen und haben Masse m. Die Masse des Gestänges sei vernachlässigbar. Ω kann als zeitlich konstant angesehen werden.

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für $\vartheta(t)$ her. (3 Punkte)

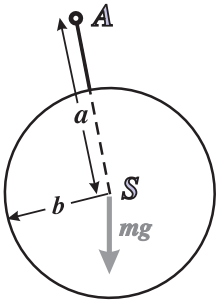
b) Berechnen Sie alle möglichen Ruhelagen $\overline{\vartheta}$ als Funktion von Ω. (3 Punkte)

c) Mit welcher Frequenz ω schwingt $\vartheta(t)$ für kleine Auslenkungen um die in b) berechneten Ruhelagen $\overline{\vartheta}$ (harmonische Näherung). Welche Ruhelagen sind stabil? (4 Punkte)

38. Satz von Steiner, physikalisches Pendel (10 Punkte)

Es sei $\underline{\hat{\Theta}}_S$ der Trägheitstensor eines starren Körpers im körperfesten System, bezogen auf Rotationen um den Schwerpunkt S. Der Körpers habe die Masse m. Er kann um einen Punkt A im Abstand $\vec{\hat{R}}$ (im körperfesten System) vom Schwerpunkt rotieren.

a) Bestimmen Sie den Trägheitstensor $\underline{\hat{\Theta}}_R$ bezogen Rotationen um Punkt A. (5 Punkte)



b) Ein physikalisches ebenes Pendel besteht aus einer Kreisscheibe aus Blech mit konstanter Dicke, Masse m und Radius b. Das Zentrum der Scheibe befindet sich im Abstand a vom Aufhängepunkt A. Berechnen Sie die Komponente des Trägheitstensors in Richtung der Drehachse, Θ_{xx}, bezogen auf den Schwerpunkt sowie auf den Aufhängepunkt. Geben Sie die Bewegungsgleichung für den Auslenkungswinkel φ an. (5 Punkte)

Formelsammlung: $\hat{\Theta}_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \Big\{ \hat{r}_i^2 \delta_{\alpha,\beta} - \hat{r}_{i,\alpha} \hat{r}_{i,\beta} \Big\}$.

39. Schallgeschwindigkeit in ausgedehnten Körpern und in Stäben (10 Punkte)

Für isotrope elastische Medien wurden folgende Gleichungen in der Vorlesung hergeleitet (Dichte ρ):

Die Bewegungsgleichung für die Auslenkungen:

$$\rho \ddot{u}_\alpha(\vec{r},t) = \sum_\beta \nabla_\beta \sigma_{\alpha,\beta}(\vec{r},t)$$

das Hookeschen Gesetz für den Spannungstensor:

$$\sigma_{\alpha,\beta}(\vec{r},t) = \lambda\, \delta_{\alpha,\beta} \sum_\gamma \nabla_\gamma u_\gamma(\vec{r},t) + \mu \Big\{ \nabla_\alpha\, u_\beta(\vec{r},t) + \nabla_\beta\, u_\alpha(\vec{r},t) \Big\}$$

und die Randbedingung für den Fall, daß keine Oberflächenkräfte wirken:

$$\sum_\beta n_\beta(\vec{s}) \sigma_{\alpha,\beta}(\vec{s},t) = 0$$

Dabei ist $\vec{n}(\vec{s})$ die Oberflächennormale in einem Punkt $\vec{s}$ der Oberfläche.

a) Zeigen Sie, daß eine ebene longitudinale Schallwelle in x-Richtung der Form $u_x = a\,\sin\Big(k(x-ct)\Big),\ u_y = 0,\ u_z = 0$ Lösung der obigen Bewegungsgleichung ist, und bestimmen Sie die Schallgeschwindigkeit c. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie für eine quaderförmige Probe der Länge $L \gg \ell_k$ (in x-Richtung), und der Breite und Höhe d (in y- b.z.w. z-Richtung), daß mit obigem Ansatz die Randbedingungen an den seitlichen Begrenzungsflächen (Flächen senkrecht zur y- b.z.w. z-Achse) <u>nicht</u> erfüllt sind. Dabei ist $\ell_k = 2\pi/k$ die Wellenlänge der Schallwelle. Für $d \gg \ell_k$ spielt dies allerdings keine Rolle. (2 Punkte)

c) Für $d \ll \ell_k$ muss man den obigen Ansatz erweitern:
$u_x = a\,\sin\Big(k(x-ct)\Big)$, $u_y = -b\,y\,\cos\Big(k(x-ct)\Big)$, $u_z = -b\,z\,\cos\Big(k(x-ct)\Big)$.
Bestimmen Sie b so, daß die Randbedingungen an den seitlichen Begrenzungsflächen für $\sigma_{y,y}$ b.z.w. $\sigma_{z,z}$ erfüllt sind. Bestimmen Sie die Schallgeschwindigkeit und vergleichen Sie diese mit dem in a) hergeleiteten Resultat. Versuchen Sie die unterschiedlichen Werte kurz plausibel zu machen (5 Punkte)

Anmerkung: Im Prinzip sind weitere Korrekturen notwendig, die jedoch für $d \ll \ell_k$ vernachlässigbar sind.

40. Zweiatomiges Molekül (12 Punkte)

Betrachten Sie ein zweiatomiges Molekül, bestehend aus identischen Atomen der Masse m. Die Wechselwirkung der Atome ist durch ein Potential $V(r)$ gegeben, wobei $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ der Abstand der beiden Atome ist.

a) Welche Erhaltungssätze gelten? Nehmen Sie an, daß der Schwerpunkt in Ruhe ist, und daß die Bewegung in der x-y-Ebene stattfindet. Sind diese Annahmen einschränkend oder vereinfachen sie nur die Rechnung? 2 P

b) Für die weitere Rechnung ist es zweckmäßig, ebene Polarkoordinaten zu verwenden, also $\vec{r}_{1,2} = (\pm\frac{1}{2}\,r\cos(\varphi), \pm\frac{1}{2}\,r\sin(\varphi), 0)$. 3 P
Berechnen Sie die kinetische Energie und die kanonischen Impulse als Funktion von r, $\dot{r}$, φ und $\dot{\varphi}$. Geben Sie die Hamiltonfunktion an.

c) Zeigen Sie, daß der Drehimpuls L_z erhalten ist, und leiten Sie die Bewegungsgleichung für $r(t)$ aus den Hamiltongleichungen her. 2 P
(Ergebnis: $\frac{m}{2}\ddot{r} = -V'_{eff}(r)$ mit $V_{eff}(r) = \frac{L_z^2}{m\,r^2} + V(r)$.)

d) Untersuchen Sie ein Potential $V(r) = -V_0\,\mathrm{e}^{-\gamma r}$ mit $\gamma > 0$ und $V_0 > 0$. Geben Sie die Bedingung dafür an, daß $r(t) = \overline{r}$ nicht von der Zeit abhängt (Kreisbahn). Der Wert von $\overline{r}$ muß nicht explizit berechnet werden, er ist Lösung einer transzendenten Gleichung. Diskutieren Sie die möglichen Lösungen qualitativ, z.B. anhand einer Zeichnung von $V_{eff}(r)$ für große, mittlere und kleine Werte von L_z. Zeigen Sie, daß es eine Grenze L_{max} gibt, so daß für $L_z > L_{max}$ keine Lösung existiert, und daß für $L_z < L_{max}$ zwei Lösungen existieren. Wie verhält sich das effektive Potential für $L_z = L_{max}$. (L_{max} müssen Sie nicht berechnen). 3 P

e) Charakterisieren Sie die möglichen Lösungstypen der Bewegungsgleichung für $L_z > L_{max}$ b.z.w. für $L_z < L_{max}$. Welcher Lösungstyp entspricht einem gebundenen Molekül? 2 P

41. Geschwindigkeitsabhängige Kräfte (10 Punkte)

Ein Teilchen bewegt sich unter dem Einfluß einer der folgenden Kräfte:

a) $\vec{F}_a = -\gamma\vec{v}$ (Viskose Reibung. $\vec{v}$ ist die Geschwindigkeit des Teilchens)

b) $\vec{F}_b = -2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}$ (Corioliskraft in einem gleichmäßig um die z-Achse rotierenden System, mit $\vec{\omega} = (0,0,\omega)$. $\vec{v}$ ist die Geschwindigkeit des Teilchens im rotierenden System.)

c) $\vec{F}_c = m\,\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$ (Zentrifugalkraft in obigem System. $\vec{r}$ ist die Position des Teilchens im rotierenden System.)

d) $\vec{F}_d = \frac{e}{c}\,\vec{v}\times\vec{B}$ (Teilchen mit Ladung e in einem homogenen Magnetfeld in z-Richtung $\vec{B} = (0,0,B)$.)

Sind folgende Aussagen richtig? Machen Sie in das jeweilige Kästchen ein $\times$, wenn Sie der Meinung sind, daß die Aussage stimmt, ein 0, wenn Sie der Meinung sind, daß die Aussage falsch ist, keinen Eintrag, wenn Sie unsicher sind. Sie müssen die Begründung Ihrer Antworten nicht angeben. Für jede richtige Antwort erhalten Sie $\frac{1}{2}$ Punkt, für jede falsche Antwort $-\frac{1}{2}$ Punkt. (Gesamtpunktzahl ≥ 0.)
Ein kurzer Hinweis auf die einschlägigen Kriterien (Formeln oder Stichworte) kann Ihnen pro Aussage bis zu $1\frac{1}{2}$ Punkte retten.

A) Das Teilchen bewegt sich von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$. Die resultierende Arbeit verschwindet. 2 P

F_a ☐ F_b ☐ F_c ☐ F_d ☐

B) Es existiert ein Potential $U(\vec{r},\vec{v})$ mit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ so daß $\left(\vec{F}\right)_\alpha = -\dfrac{\partial U}{\partial r_\alpha} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial U}{\partial v_\alpha}$ 2 P

F_a ☐ F_b ☐ F_c ☐ F_d ☐

C) Der Impuls in z-Richtung p_z ist erhalten 2 P

F_a ☐ F_b ☐ F_c ☐ F_d ☐

D) Der Drehimpuls in z-Richtung L_z ist erhalten 2 P

F_a ☐ F_b ☐ F_c ☐ F_d ☐

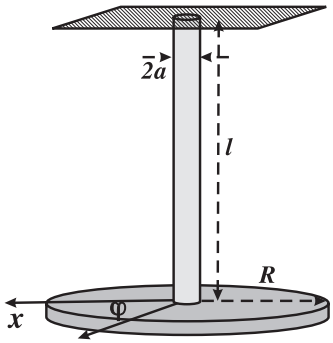
E) Die Energie ist erhalten 2 P

F_a ☐ F_b ☐ F_c ☐ F_d ☐

42. Drehpendel (10 Punkte)

Drehpendel wurden früher für besonders empfindliche Meßinstrumente verwendet, z.B. Spiegelgalvanometer oder Gravitationsdrehwaage, da sich mit Hilfe eines Torsionsfadens besonders kleine Rückstellkräfte realisieren lassen.

Ein Drehpendel besteht aus einem elastisch isotropen zylindrischen Stab (Faden) mit Achse in z-Richtung, Länge l und Durchmesser $2a$. Der Stab ist an einem Ende fest eingespannt. Am anderen Ende ist eine Kreisscheibe mit Radius R und Masse m befestigt. Die Drehschwingungen der Kreisscheibe werden durch den Winkel $\varphi(t)$ beschrieben.



a) Berechnen Sie die z-Komponente des Drehmoments M_z als Funktion des Winkels φ, sowie die Federkonstante $\kappa = -M_z/\varphi$. 4 P

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Verschiebungen $\delta\vec{u}$ für ein kleines Stück der Länge dl des Torsionsstabes, dessen Deck- und Bodenfläche gegeneinander um den Winkel $\delta\varphi$ verdreht sind. Daraus können Sie die nichtverschwindenden Komponenten des Verzerrungstensors $\underline{\eta}$ berechnen, mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes den Spannungstensor $\underline{\sigma}$ und schließlich die gesuchte Komponente des Drehmoments.

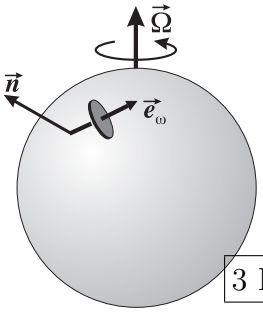
b) Wie hängt die Federkonstante κ von dem Radius des Fadens a ab, wie würde die Federkonstante für Dehnung des Fadens von a abhängen? ($\sim a^2$?) 2 P

c) Berechnen Sie das Hauptträgheitsmoment Θ_3 der Kreisscheibe. 2 P

d) Berechnen Sie die Schwingungsfrequenz des Drehpendels. 2 P
(Falls Sie a) nicht lösen konnten, verwenden Sie $M_z = -\kappa\varphi$.)

43. Kreiselkompaß (8 Punkte)

Ein Kreisel mit Hauptträgheitsmoment Θ_3 in Richtung der Figurenachse dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um diese. Der Kreisel befindet sich auf der Erdoberfläche und seine Rotationsachse ist in einer beliebigen horizontalen Richtung $\vec{e}_\omega$ auf der Erde fixiert, d.h. die Achse rotiert mit der Erdrotation. Die Rotation des Kreisels wird also durch $\vec{\omega}(t) = \omega\,\vec{e}_\omega(t)$ beschrieben. Die Erde rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{e}_z$, wobei $\omega \gg \Omega$ ist



a) Geben Sie den Drehimpuls des Kreisels $\vec{L}'$ im körperfesten System, sowie $\vec{L}$ in einem fixsternfixiertes System (Inertialsystem) für $\omega \gg \Omega$ an. 3 P

b) Berechnen Sie die Zeitableitung der Drehachse $\dot{\vec{e}}_\omega$, des Drehimpulses $\dot{\vec{L}}$ und damit das Drehmoment $\vec{M}$, das auf die Lager des Kreisels ausgeübt wird. 3 P

c) Tatsächlich ist der Kreisel mit seiner horizontaler Achse auf einer Platform montiert, die sich um die Normale $\vec{n}$ drehen kann. Die Bewegung der Platform unter dem Einfluß des vom Kreisel ausgeübten Drehmoments ist stark gedämpft. In welcher Richtung wird sich der Kreisel nach dem Abklingen von Einschwingvorgängen ausrichten? 2 P

FINIS