4. Die Kunst des Balancierens

Experimente:
Verschiedene Formen des Gleichgewichts
Starres Pendel
Zylinder mit verschiedenen Trägheitsmomenten auf einer schiefen Ebene
Balancieren von Stäben verschiedener Länge
Balancieren mit einer Balancierstange
Versuche zum Newtonschen Wechselwirkungsgesetz

Beide Worte, „Gleichgewicht“ und „Balancieren“, haben etwas mit der Waage zu tun. Eine Balkenwaage ist im Gleichgewicht, wenn gleich schwere Gewichte an beiden Armen hängen. Im Englischen ist „balance“ eine Übersetzung für das Wort „Waage“. In dieser Vorlesung wollen wir jedoch nicht die Physik der Waage besprechen, sondern wir wollen uns mit Zirkuskunst beschäftigen. Der Tänzer auf dem Seil versucht, sein Gleichgewicht zu halten. Das erfordert offenbar viel Geschick, weshalb man auch von einer Kunst spricht. Allerdings darf auch die Kunst nicht den Gesetzen der Physik widersprechen. In der heutigen Vorlesung werden wir uns mit der Physik hinter der Kunst des Balancierens beschäftigen.

4.1 Die verschiedenen Formen des Gleichgewichts

In der Physik unterscheidet man drei Formen des Gleichgewichtes, indifferentes, stabiles und labiles Gleichgewicht und demonstriert diese oft mit einer Kugel, die sich in verschiedenen Lagen befindet:

Indifferentes Gleichgewicht: Auf einer horizontalen Tischplatte wird eine abgelegte Kugel an jeder Stelle der Fläche in Ruhe liegen bleiben.

Stabiles Gleichgewicht: Befindet sich auf der Tischplatte eine Vertiefung, so wird eine Kugel, die man an irgendeinen Punkt dieser Vertiefung bringt, in Richtung des tiefsten Punktes rollen, die Bewegung auf der anderen Seite der Vertiefung fortsetzen und - nach einigen Hin- und Herbewegungen - wegen der unvermeidlichen Reibung, am tiefsten Punkt zur Ruhe kommen. Stößt man sie dann ein wenig an, rollt sie in ihre stabile Ruhelage zurück.

Instabiles Gleichgewicht: Befindet sich auf der Platte eine konvex geformte Erhöhung, so gelingt es nur mit einiger Mühe, die Kugel so hinzulegen, das sie auf dem höchsten Punkt liegen bleibt. Schon ein kleinster Anstoß bringt sie aus der Ruhelage, und sie wird zur Seite herunter rollen.

Auch mit einem „starren“ mathematischen Pendel, bei dem wir uns eine punktförmige Masse an einem masselosen Stab angebracht denken, lässt sich das stabile und instabile

Gleichgewicht gut demonstrieren, ein indifferentes Gleichgewicht gibt es bei diesem Pendel jedoch nicht.
Wenn sich die Masse genau unter dem Aufhängepunkt befindet, ist das Gleichgewicht stabil, denn nach einer kleinen Auslenkung schwingt das Pendel wieder zurück und kommt schließlich an dem tiefsten Punkt zur Ruhe.

Versuche:
Kugel auf verschieden geformten Unterlagen
Starres Pendel

Die Position, in der sich die Masse senkrecht über dem Drehpunkt befindet, ist die des labilen Gleichgewichtes. Ein kleiner Anstoß bringt das Pendel aus dieser Lage, und es gerät in große Schwingungen, die durch Reibungskräfte langsam gedämpft werden, bis die Masse senkrecht unter dem Drehpunkt in der stabilen Gleichgewichtslage zur Ruhe kommt.
Das instabile Gleichgewicht des starren Pendels ähnelt der Situation eines Tänzers auf dem Seil: Dem Pendel entspricht nun der Tänzer, und der Drehpunkt liegt an der Stelle, an der dieser das Seil berührt. Warum erleidet der Tänzer nicht das „Schicksal“ des starren Pendels? Selbst wenn er nicht vorwärts schreitet, ist der Körper des Tänzers in dauernder Bewegung. Offenbar gelingt es ihm dadurch, nämlich indem er immer dem drohenden Fall entgegenarbeitet, sich im Gleichgewicht zu halten. Wir nennen diesen Fall ein **dynamisches Gleichgewicht**.

4.2 Die Rolle des Trägheitsmomentes bei der Dynamik

Da das starre Pendel eine gewisse Ähnlichkeit mit der Situation des Seiltänzers hat und gleichzeitig auch mathematisch leicht zu behandeln ist - jedenfalls in der Umgebung des stabilen und des labilen Gleichgewichtspunktes - wollen wir in diesem Abschnitt die Physik des starren Pendels diskutieren.
Die grundlegende Gleichung der Mechanik, die die Dynamik von Bewegungen beschreibt, ist das Newtonsche Grundgesetz:

$$\text{Masse x Beschleunigung = Kraft}$$

$$m \cdot a = F$$

Die Masse m, die in dieser Gleichung vorkommt, heißt „träge Masse“ aus folgendem Grund: Für eine gegebene Stärke der Kraft F ist die Beschleunigung umso kleiner, je größer die Masse ist. Wir kennen das: Die Kraft eines Erwachsenen reicht aus, um einen Kinderwagen in Bewegung zu setzen, aber kaum, um ein Personenauto von der Stelle zu schieben. Es ist die Trägheit der Masse, die sich einer Bewegungsänderung widersetzt.
Die obige Formel bezieht sich auf Bewegungen entlang einer Geraden. Bei Drehbewegungen wird ein Winkel φ verändert, man spricht von Winkelgeschwindigkeit φ' und von Winkelbeschleunigung φ''. Anstelle der trägen Masse m tritt dann das Trägheitsmoment Θ und anstelle der Kraft F das Drehmoment N, sodass die Newtonsche Bewegungsgleichung jetzt lautet

$$\text{Trägheitsmoment x Winkelbeschleunigung = Drehmoment}$$

$$\Theta \cdot \varphi'' = D$$

Das Trägheitsmoment widersetzt sich einer Veränderung der Winkelgeschwindigkeit durch ein äußeres Drehmoment. Die Winkelbeschleunigung ist bei gleichem Drehmoment umso kleiner, je größer das Trägheitsmoment ist.

Für den einfachsten Fall einer Punktmasse m, die sich um einen Drehpunkt im Abstand R bewegt, ist $\Theta = m \cdot R^2$. Für Zylinder der Masse m und vom Radius R gelten für Drehung um die Symmetrieachse folgende Werte: Hohlzylinder $\Theta = m \cdot R^2$, Vollzylinder $\Theta = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$. Das Drehmoment, das eine Kraft F im Abstand R ausübt, ist definiert als $D = F \cdot R \cdot \sin \varphi$, wobei φ der Winkel zwischen dem Kraft- und dem Abstandsvektor ist.

Versuch:
Rollen von Zylindern, die gleiche Massen und Radien haben, aber verschiedene Massenverteilungen und damit verschiedenen Trägheitsmomente.

Hieraus folgt die erste Lektion für den Seiltänzer: Indem er sein Trägheitsmoment vergrößert, z.B. mit Hilfe einer Balancierstange, wird für das Drehmoment, das von der Erdanziehung erzeugt wird, die Winkelbeschleunigung kleiner und dem Tänzer bleibt mehr Zeit, das dynamische Gleichgewicht wiederherzustellen.

Wir untersuchen diese Situation etwas genauer für das starre Pendel. Für ein solches Pendel ist das Trägheitsmoment $\Theta = m \cdot R^2$, worin R die Länge bzw. der Radius des Pendels ist. Das Drehmoment ist gegeben durch $D = F_G \cdot R \cdot \sin\varphi$, wobei F_G die Gewichtskraft des Pendelkörpers und φ der Winkel relativ zur Senkrechten ist.

Die Zeit, die das um seine stabile Ruhelage schwingendende Pendel braucht, um eine vollständige Schwingung auszuführen, heißt Schwingungsdauer T, wobei gilt:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(\Theta / F_G \cdot R)}, = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(R/g)},$$

Hierin sind g die Erdbeschleunigung und R die Länge des Pendels. Wichtig ist die Abhängigkeit von der Pendellänge R. Es ergibt sich T = 0,6 s für R = 10 cm und T = 2 s für R = 1 m.

Die Formel für die Schwingungsdauer T gilt auch für die Zeit T*, die für den „Sturz“ des Pendels aus seiner instabilen Gleichgewichtslage auf Grund einer kleinen Störung charakteristisch ist. Nehmen wir an, wir hätten das Pendel um den kleinen Winkel φ_0 aus der instabilen Ruhelage ausgelenkt, dann wird sich mit der Zeit diese Auslenkung vergrößern, zur Zeit t = T*/4 ist der Winkel auf $\varphi = 2{,}5\ \varphi_0$ angewachsen und nach t = T*/2 gilt $\varphi = 11{,}5\ \varphi_0$. Die Bewegung wird immer schneller.

4.3 Balancieren eines Stabes

Wir beginnen sofort mit einem Versuch:

Versuch:
Balancieren von Stäben verschiedener Längen auf der Handfläche bzw. Fingerspitze.

Beim Balancieren in diesem Versuch führt man den Unterstützungspunkt so nach, dass der Stab möglichst senkrecht steht und damit nur ein möglichst kleines Drehmoment auf ihn ausgeübt wird. Bei einem ausgedehnten Körper kann man sich die Wirkung der Schwerkraft so vorstellen, als wäre die gesamte Masse in einem Punkt, dem sog. Schwerpunkt, konzentriert. Wenn der Schwerpunkt über dem Unterstützungspunkt liegt, wirkt kein Drehmoment. Daher ist die zweite Lektion des Akrobaten, den Schwerpunkt möglichst genau über dem Unterstützungspunkt zu halten.

Die Fähigkeit, einen Stab zu balancieren hängt ganz eindeutig von der Länge des Stabes ab. Kurze Stäbe, z.B. Bleistifte lassen sich kaum balancieren, Besenstiele dagegen relativ leicht. Offenbar stürzen Bleistifte schneller als Besenstiele. Man kann auch sagen Besenstiele sind in ihrer Bewegung träger. Dabei geht es nicht um die größere Masse, wie die obige Formel für die charakteristische Zeit T* zeigt, sondern allein um die Länge. Ein längerer Stab fällt langsamer als ein kurzer. In unserem Beispiel: ein Bleistift fällt etwa fünf mal schneller als ein Besenstiel. Die Reaktionszeit unserer Hand reicht offenbar nicht aus, um den Fall des Bleistiftes zu kompensieren, aber um den Besenstiel am Fallen zu hindern.

Das Problem mit der Stange (Bleistift oder Besenstiel) auf der Handfläche hat nämlich eine starke Ähnlichkeit mit dem Problem des starren Pendels, das sich senkrecht über dem Drehpunkt befindet. Die Handfläche ist der Drehpunkt. Deshalb kann man auch die oben angegebene Formel für die charakteristische Zeit T* benutzen. Diese Zeit hängt nur von der Länge ab. Für einen Besenstiel der Länge 2 m gilt $T^*/4 = 0{,}7$ s, während man für einen Bleistift von 10 cm findet $T^*/4 = 0{,}15$ s.

Allerdings ist in diesem neuen Problem des Balancierens der Drehpunkt, der mit dem Auflagepunkt identisch ist, nicht fest im Raum fixiert. Mit Hilfe der Handbewegung lässt sich die Lage des Drehpunktes immer so verändern, dass er senkrecht unter die Spitze der Stange geführt wird. Damit wird das System immer wieder in die Ausgangslage zurückgeführt. Da das Nachführen nie exakt gelingt, wird die Stange immer wieder zu fallen beginnen und das Nachführen hat kein Ende. Darin liegt die Bedeutung des dynamischen Gleichgewichts.

Das dynamische Gleichgewicht wird von zwei Zeitkonstanten bestimmt: der „Fallzeit“ d.h. der Zeit, die das System braucht, um signifikant aus dem instabilen Gleichwicht zu kommen (beim starren Pendel die charakteristische Zeit T*/4) und die Reaktionszeit T_R, in der der Balancierende das System nachführt und es damit aus der gefährlichen Lage herausführt. Für ein dynamisches Gleichgewicht muss gelten $T_R < T^*/4$, d.h. der Balancierende muss schneller reagieren als das System abstürzen kann. Dass dies für den Menschen erfüllt ist, ist ganz sicher auf die Evolution zurückzuführen, da eine entsprechende Reaktionszeit, die uns auch das aufrechte Gehen erlaubt, einen Überlebensvorteil bedeutete. Eine noch kürzere Reaktionszeit, wie sie z.B. für das Balancieren eines Bleistifts nötig wäre, bildete offensichtlich keinen Überlebensvorteil.

(Hier das Bild aus Luchner über den Akrobaten).

4.4 Seiltänzer mit der Balancierstange

Der Seiltänzer betritt das Seil mit einer Balancierstange und scheint sich an ihr festzuhalten. Das ist nicht richtig, denn auch die Balancierstange ist ja nicht im Raum befestigt. Dennoch hilft die Stange dem Seiltänzer, das dynamische Gleichgewicht zu halten. Die Stange ist schwer und, was besonders auffällt, die Stange ist lang und hat somit ein großes Trägheitsmoment, das sich zu dem des Seiltänzers addiert. Dies hat zur Folge, dass der Tänzer langsamer aus dem Gleichgewicht kommt und er somit besser reagieren kann. Weiterhin wird die Stange möglichst tief gehalten und ist stark durchgebogen, wodurch der Schwerpunkt des Gesamtsystems Seiltänzer mit Stange nach unten verlagert wird. Auf diese Weise reduziert sich auch das Drehmoment D.

Um das Gleichgewicht zu halten, muss sich der Seiltänzer bewegen: Er muss immer versuchen, seinen Schwerpunkt genau über dem Seil zu halten. Denn in diesem Augenblick verschwindet das Drehmoment. Wie kann er das machen? Der Seiltänzer hat mehrere Möglichkeiten: Er kann z.B. die Position seines Körpers relativ zu der Position seiner Füße verschieben. Er kann aber auch die Lage des Körpers zur Balancierstange verändern.

Versuch:
Balancieren auf einem Balanciersteg, mit und ohne Stange

4.5 Sich an der Luft „festhalten“

Es gibt auch Seiltänzer, die anstelle einer Stange einen Schirm zum Balancieren benutzen. Der solcher Schirm ist so leicht, dass er nur wenig zum Trägheitsmoment beiträgt. Welche Rolle spielt er also? Indem der Seiltänzer den Schirm hin und her bewegt, braucht er Kraft, um den Luftwiderstand zu überwinden. Wenn der Tänzer den Schirm auf sich zu bewegt, dann wird er selbst - auf Grund des Newtonschen Wechselwirkungsgesetzes (actio = reactio) - auch zum Schirm hingezogen. Der Seiltänzer kann damit die Lage seines Schwerpunktes verändern, ihn also z.B. wieder senkrecht über das Seil bringen.

Versuch:
Actio gleich reactio z.B. mit zwei Wagen.

Benutzen wir die Formel für die Reibungskraft $F_R = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$, worin c_w der Widerstandswert, ρ die Dichte der Luft, A die Fläche des Schirms und v seine Geschwindigkeit sind, dann ergibt sich für $v = 3$ m/s, $A = 1$ m² und $c_w = 1{,}3$ eine Kraft von 8 N, mit dem der Seiltänzer ein Drehmoment von $N_1 = 16$ Nm ausüben kann, wenn er den Schirm über Kopfhöhe bewegt. Auf der anderen Seite bewirkt die Schwerkraft bei einer Auslenkung um einen Winkel von $\delta\varphi$ ein Drehmoment von $N_2 = m \cdot g \cdot R_S \cdot \delta\varphi$,so dass sich für eine Person mit $m = 50$ kg und $R_S = 1$ m bei $\delta\varphi = 2°$ ein Drehmoment von $N_2 =$ 17 Nm ergibt. Man sieht, dass der Seiltänzer ein solches Drehmoment mit dem Schirm kompensieren kann.
Trotz dieser physikalischen Erklärungen bleibt die Akrobatik eine hohe Kunst, wie auch das Wort Seiltänzer ausdrückt. Denn letztlich kommt es bei allen diesen Phänomenen des Balancierens auf schnelle und präzise körperliche Reaktionen an. Ob man einen Stab auf der Hand balanciert oder ob ein Mensch auf dem Seil läuft und dort tanzt, immer muss der Schwerpunkt senkrecht über den Unterstützungspunkt gebracht werden. Da dies aber eine instabile Lage ist, muss dauernd nachjustiert werden, und je schneller die Reaktion, desto kleiner muss die Korrektur sein.

4.3 Biographie: Leonhard Euler (1707 – 1783)

"*Euler rechnete so mühelos wie andere Menschen atmen oder der Adler in den Lüften schwebt*."

Kindheit und Studium

Leonhard wurde als Sohn des protestantischen Pfarrers Paul Euler in Basel geboren. Neben dem Theologiestudium hatte sein Vater Mathematikvorlesungen bei Jakob Bernoulli besucht und sich mit dessen Sohn Johann angefreundet. Damit hatte er genügend Erfahrung, um seinem Sohn in elementarer Mathematik sowie in einigen anderen Fächern zu unterrichten. Die Schule, die Leonard anschließend in Basel besuchte, war relativ schlecht; insbesondere lernte er dort nahezu keine Mathematik. Da andererseits durch den Privatunterricht seines Vaters Leonards Interesse an der Mathematik entzündet war, las er selbständig mathematische Bücher und nahm einige Privatstunden.
Es war der Wunsch des Vaters, dass auch Leonard Pfarrer werden sollte, und so schickte er ihn mit 14 Jahren zur Universität Basel. Hier sollte er zunächst eine allgemeine Grundausbildung erhalten, um später ein fortgeschrittenes theologisches Studium anzuschließen. Im Jahre 1723 schloss der junge Euler seine philosophischen Studien mit einer Arbeit ab, in der er die philosophischen Ideen von Descartes und Newton verglich und gegenüberstellte. Im gleichen Jahr folgte er dem Wunsch des Vaters und begann mit dem Theologiestudium. Obwohl er zeitlebens ein frommer Christ war, bemerkte er schon bald, dass ihn die Theologie, sowie Griechisch und Hebräisch nicht so begeistern konnten wie die Mathematik. Nachdem Johann Bernoulli, von dem Leonard während seiner privaten mathematischen Studien hin und wieder betreut worden war und der die große mathematische Begabung dieses Jungen erkannt hatte, mit seinem Freund aus der Studienzeit gesprochen hatte, gab Leonards Vater seine Zustimmung für einen Studienfachwechsel seines Sohnes zur Mathematik.
Kurz nach dem Abschluss seines Mathematikstudiums veröffentlichte Leonard Euler im Jahre 1726 seine erste Arbeit. Bereits ein Jahr später nahm er an dem Wettbewerb der Pariser Akademie um den "Großen Preis" teil, der im Jahre 1727 für das Thema "Die beste Anordnung von Masten auf Schiffen" ausgeschrieben war. Auch wenn Euler in diesem Wettbewerb nur den zweiten Platz belegte, so war dies für den gerade Examinierten ein großer Erfolg.

Der Beginn seiner Karriere in St. Petersburg (1727-1741)

Als Euler sich nach einer akademischen Anstellung umsah, fügte es sich, dass ihm nach dem Tode von Nikolaus Bernoulli dessen Stelle in St. Petersburg angeboten wurde. Damit verbunden war, dass er Vorlesungen über die Anwendung der Mathematik und Mechanik auf die Physiologie halten müsse. Er nahm die Stelle Ende 1726 an, bat jedoch darum, erst im folgenden Frühjahr nach Russland reisen zu müssen. Dies hatte zwei Gründe: Erstens wollte er sich gründlich auf sein neues Aufgabengebiet vorbereiten und zweitens hatte er ein weiteres Eisen im Feuer. Da der Physikprofessor

an der Universität Basel gestorben war, machte Euler sich Hoffnungen, dessen Stelle zu erhalten. Nachdem man dem damals noch 19jährigen mitgeteilt hatte, dass in Basel die Wahl - wohl hauptsächlich wegen seiner Jugend – nicht auf ihn gefallen sei, machte er sich auf nach St. Petersburg. Zur damaligen Zeit benötigte man für die Reise von Basel nach St. Petersburg etwa 6 Wochen: Euler fuhr mit dem Schiff den Rhein hinab, dann mit der Postkutsche durch die verschiedenen deutschen Staaten und schließlich mit dem Schiff von Lübeck über die Ostsee.
In St. Petersburg wurde er Mitglied der Akademie der Wissenschaften, die Katharina I. (1684-1727) zwei Jahre zuvor gegründet hatte. Auf Wunsch verschiedener Wissenschaftler wurde er in die mathematisch-physikalische Abteilung berufen und erhielt nicht die Stellung in der Physiologie, die man ihm ursprünglich angeboten hatte. Zur damaligen Zeit gab es in St. Petersburg viele renommierte Wissenschaftler, so dass Euler ein außergewöhnliches geistiges Umfeld vorfand. Zunächst jedoch diente er 3 Jahre als Sanitätsoffizier in der russischen Marine. Nachdem er 1730 zum Professor für Physik und damit zum Vollmitglied der Akademie berufen worden war, gab er diese Stellung bei der Marine auf.
Als dann Daniel Bernoulli, der den Lehrstuhl für Mathematik an der Akademie innehatte, im Jahre 1733 nach Basel zurückkehrte, wurde Euler dessen Nachfolger. Die damit verbundene finanzielle Besserstellung erlaubte ihm nun zu heiraten. Seine Frau war die Tochter eines Malers und entstammte ebenso wie Euler einer Schweizer Familie. Sie hatten zusammen 13 Kinder, von denen jedoch nur 5 die Kindheit überlebten. Wie glücklich Euler mit seiner Familie und den Kindern war, mag folgender Hinweis verraten. Er behauptete, dass er einige seiner größten mathematischen Entdeckungen mit einem Baby auf dem Arm und einigen spielenden Kindern zu seinen Füßen gemacht habe.
Nach 1730 war Euler an vielen staatlichen Projekten beteiligt, wie Kartographie, naturwissenschaftliche Ausbildung, Schiffbau usw. Außerdem widmete er sich intensiv seiner wissenschaftlichen Forschung, die die Gebiete Zahlentheorie, Analysis einschließlich Differentialgleichungen und Variationsrechnung sowie theoretische Mechanik umfasste. Er schrieb zahlreiche Artikel und das Buch "Mechanica", in dem er erstmals ausführlich die Newtonsche Mechanik in analytischer Form darstellte. Doch 1735 stellten sich zum ersten Mal gesundheitliche Probleme ein: Euler befiel ein starkes Fieber, an dem er nahezu gestorben wäre. Ob seine spätere Blindheit hiermit zusammenhängt, ist ungeklärt. Euler selbst glaubte, dass sie von einer Überanstrengung der Augen bei seinen kartographischen Arbeiten herrührte, aber vielleicht war es auch nur eine Linsentrübung.
Der Gewinn des Großen Preises der Pariser Akademie in den Jahren 1738 und 1740 brachte Euler ein enormes Ansehen, auch wenn er den Preis jeweils mit anderen teilen musste. So ist es nicht verwunderlich, dass er ein Angebot aus Berlin erhielt, das er jedoch zunächst ablehnte.

Die Berliner Jahre (1741-1766)

Als jedoch im Jahre 1741 politische Unruhen in Russland das Leben der Ausländer schwieriger machten, änderte Euler seine Meinung und nahm ein verbessertes Angebot an. Auf Einladung Friedrichs des Großen (1712-1786, König ab 1740) fuhr er nach Berlin, wo eine Umwandlung der wissenschaftlichen Gesellschaft in eine Akademie der

Wissenschaften geplant war. Er selbst schrieb in einem Brief: "*Ich kann in meiner Forschungsarbeit das tun, was ich möchte. ..... Der König nennt mich seinen Professor und ich denke, dass ich der glücklichste Mensch auf der Welt bin*." Doch die gute Beziehung war nicht von Dauer. Zum einen mischte sich der König in viele Dinge ein, zum anderen hielt er – zusammen mit Voltaire – nicht mit spöttelnder Kritik zurück, wenn Euler seinen mathematischen Ergebnissen mehr traute als der Empirie.
Als die Berliner Akademie 1744 gegründet wurde, ernannte man Maupertuis zum Präsidenten und Euler zum Direktor für Mathematik. Euler übernahm eine Unmenge von Aufgaben: Neben der Vertretung des Präsidenten in dessen Abwesenheit war er u.a. für das Observatorium und den botanischen Garten zuständig, musste sich um personelle und finanzielle Angelegenheiten kümmern, managte die Herausgabe von Kalendern und geographischen Karten und war auch für das hydraulische System im Schloss Sans Souci, der Sommerresidenz des Königs, zuständig. Neben diesen und vielen weiteren Aufgaben für die Akademie und den Staat war er wissenschaftlich äußerst produktiv. In den 25 Jahren seiner Berliner Zeit schrieb er 380 Artikel und einige Bücher, u.a. eine allgemeinverständliche wissenschaftliche Schrift mit dem Titel "Briefe an eine deutsche Prinzessin", die bald in viele Sprachen übersetzt wurde. Sie behandelt die im 18. Jahrhundert zur Bildung zählenden Themen und enthält ausführliche Passagen über physikalische Erkenntnisse.
Nachdem Maupertuis im Jahre 1759 gestorben war, übernahm Euler die Führung der Berliner Akademie, wurde jedoch nicht zum Präsidenten ernannt. Der König bot d'Alembert (1717-1783) diese Stellung an und mischte sich auch sonst stark in die Angelegenheiten der Akademie ein. Aus diesen Gründen hielt Euler die Zeit für gekommen, Berlin zu verlassen, auch wenn d'Alembert das Angebot ablehnte.

Die Rückkehr nach St. Petersburg (1766-1783)

Während seiner Berliner Zeit hatte Euler einen Teil seines St. Petersburger Gehalts weiter bezogen. Dafür kaufte er Bücher und Instrumente für die Akademie in St. Petersburg, schrieb weiterhin wissenschaftliche Abhandlungen für sie und gab jungen Russen Privatunterricht. Als er 1766 mit 59 Jahren nach Russland zurückkehrte, war der preußische König stark verärgert.
Bald nach seiner Rückkehr wurde Euler nahezu vollständig blind. Im Jahre 1771 wurde sein Haus durch ein Feuer zerstört, wobei er mit Glück sein Leben und seine mathematischen Manuskripte retten konnte. Kurz danach unterzog er sich einer Staroperation und konnte für kurze Zeit wieder sehen. Doch Euler fehlte die nötige Vorsicht, so dass er schließlich vollständig erblindete. Dennoch konnte er auf Grund seines außergewöhnlichen Gedächtnisses seine wissenschaftlichen Arbeiten fortsetzen. Hierbei halfen ihm zwei seiner Söhne und einige weitere wissenschaftliche Mitarbeiter der Akademie, mit denen er seine Ideen diskutierte und die ihm halfen, Tabellen zu berechnen, Beispiele zusammenzustellen und die Arbeiten zu schreiben. So konnte er fast die Hälfte seiner wissenschaftlichen Arbeiten während dieser letzten Schaffensperiode veröffentlichen.
Den größten Teil des Tages, an dem er sterben sollte, verbrachte er wie üblich: Er gab seinen Enkeln Mathematikunterricht, führte einige Rechnungen an zwei Tafeln durch und diskutierte mit seinen Assistenten über den neulich entdeckten Planeten Uranus.

Am Nachmittag erlitt er eine Gehirnblutung, verlor das Bewusstsein und starb noch am gleichen Abend.
Leonard Euler war einer der produktivsten Wissenschaftler aller Zeiten. Seine Veröffentlichungen umfassen 886 Arbeiten und Bücher und füllen insgesamt etwa 90 Bände. Selbst nach seinen Tode wurden seine unveröffentlichten Werke noch 50 Jahre lang von der St. Petersburger Akademie herausgegeben.
Zusammenfassend kann man sagen, dass Euler wohl der größte Mathematiker des 18. Jahrhunderts war - sein einziger ernst zu nehmender Konkurrent ist Lagrange.