Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, A. Samberg

Universität Heidelberg
Wintersemester 2013/14

12. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 20.–22.01.2014
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 23.01.2014

P 60 Felder an Grenzflächen zwischen Materialien (+5 Punkte)

Wir wollen das Verhalten von elektrischen und magnetischen Feldern an Grenzflächen zwischen Materialien mit verschiedenen Dielektrizitätskonstanten und Permeabilitäten untersuchen. Dabei nehmen wir an, dass die freibeweglichen Ladungs- und Stromdichten an den Grenzflächen verschwinden.

(a) Leiten Sie die Stetigkeitsbedingungen für die Tangential- bzw. Normalkomponenten der Felder $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{H}$ an einer Grenzfläche zwischen verschiedenen Materialen her.

(b) Geben Sie Gleichungen für die nichtstetigen Komponenten der Felder an.

(c) Leiten Sie aus den Stetigkeitsbedingungen die „Brechungsgesetze“ für die elektrischen bzw. magnetischen Feldlinien an Grenzflächen her.

S 61 Brechung und Reflexion an Grenzflächen von Dielektrika (6 Punkte)

Die Ebene $z = 0$ bilde die Grenzfläche zwischen zwei homogenen, isotropen und nichtleitenden Dielektrika mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 bzw. ε_2 und den Permeabilitäten μ_1 bzw. μ_2.
Eine monochromatische ebene Welle

$$\boldsymbol{E}_e = \boldsymbol{\epsilon}_e e^{i(\boldsymbol{k}_e \cdot \boldsymbol{x} - \omega_e t)} \tag{1}$$

falle im ersten Dielektrikum auf die Grenzfläche ein. Ein Teil der elektromagnetischen Energie wird in das erste Dielektrikum reflektiert als monochromatische ebene Welle

$$\boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{\epsilon}_r e^{i(\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{x} - \omega_r t)} \,, \tag{2}$$

der Rest dringt als durchgehende monochromatische ebene Welle

$$\boldsymbol{E}_d = \boldsymbol{\epsilon}_d e^{i(\boldsymbol{k}_d \cdot \boldsymbol{x} - \omega_d t)} \tag{3}$$

in das zweite Medium ein.

(a) Zeigen Sie, dass aus den Stetigkeitsbedingungen für die Tangential- bzw. Normalkomponenten der Felder $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{H}$ folgt, dass

$$\omega_e = \omega_r = \omega_d\,, \tag{4}$$

$$\frac{|\boldsymbol{k}_e|}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{|\boldsymbol{k}_r|}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{|\boldsymbol{k}_d|}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}\,. \tag{5}$$

(b) Zeigen Sie, dass die drei Wellenvektoren $\boldsymbol{k}_e$, $\boldsymbol{k}_r$ und $\boldsymbol{k}_d$ in einer Ebene liegen.

Wir bezeichnen mit θ_e, θ_r und θ_d die Winkel, die die Vektoren $\boldsymbol{k}_e$, $\boldsymbol{k}_r$ und $\boldsymbol{k}_d$ jeweils mit dem Lot auf die Grenzfläche einschließen.

(c) Zeigen Sie, dass $\theta_e = \theta_r$. Leiten Sie das Snelliussche Brechungsgesetz her:

$$\frac{\sin\theta_e}{\sin\theta_d} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}\,. \tag{6}$$

S 62 Telegraphengleichung (4 Punkte)

Wir betrachten ein homogenes Medium mit zeitlich und räumlich konstanter Dielektrizitätskonstante ε, Permeabilität μ und spezifischer Leitfähigkeit σ. Es sei angenommen, dass sich keine freien Ladungen im Medium befinden, d. h. das Medium ist elektrisch neutral.

(a) Leiten Sie aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen und den Materialgleichungen $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ sowie dem Ohmschen Gesetz $\boldsymbol{j}_f = \sigma\boldsymbol{E}$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ her. Diese Differentialgleichungen heißen Telegraphengleichungen und gehören zu den Wellengleichungen.

(b) Zeigen Sie, dass man für Isolatoren, d. h. für $\sigma = 0$, aus den Telegraphengleichungen die bekannten Wellengleichungen mit einer modifizierten Lichtgeschwindigkeit erhält.

S 63 Hohlwellenleiter (optional, +12 Punkte)

Wir wollen elektromagnetische Wellen in einem Hohlwellenleiter betrachten, d. h. in einem in z-Richtung unendlich ausgedehnten, hohlen Rohr mit konstanter (nicht notwendig kreisförmiger) Querschnittsfläche. Die Wände des Hohlwellenleiters sollen aus ideal leitendem Material bestehen, es soll daher im Inneren des Materials keine elektrischen und magnetischen Felder geben. Im Inneren des Wellenleiters befinde sich ein Vakuum. Die Querschnittsfläche habe zunächst beliebige Form.
Man erwartet, dass sich elektromagnetische Wellen in z-Richtung ausbreiten können, während aufgrund der Randbedingungen in x- und y-Richtung nur stehende Wellen möglich sind.

(a) Verwenden Sie den Ansatz

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(x,y)\, e^{i(k_z z - \omega t)}\,, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0(x,y)\, e^{i(k_z z - \omega t)}\,, \tag{7}$$

um aus den allgemeinen Wellengleichungen für $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ im Vakuum die folgenden Gleichungen für $\boldsymbol{E}_0$ und $\boldsymbol{B}_0$ herzuleiten:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_\perp^2\right) \boldsymbol{E}_0(x,y) = 0 \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_\perp^2\right) \boldsymbol{B}_0(x,y) = 0\,, \tag{9}$$

wobei $k_\perp^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_z^2$. Welche Ungleichung zwischen ω und $k_\perp$ muss für die Existenz von Wellen in z-Richtung erfüllt sein?

(b) Zeigen Sie, dass die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes auf dem Rand verschwinden muss. Leiten Sie daraus her, dass die Normalkomponente des magnetischen Feldes auf dem Rand verschwinden muss.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen, dass für die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ des obigen Ansatzes die folgenden Relationen gelten:

$$k_\perp^2(\boldsymbol{e_x} E_{0,x} + \boldsymbol{e_y} E_{0,y}) = i k_z \nabla E_{0,z} - \frac{i\omega}{c}\, \boldsymbol{e_z} \times \nabla B_{0,z} \tag{10}$$

$$k_\perp^2(\boldsymbol{e_x} B_{0,x} + \boldsymbol{e_y} B_{0,y}) = i k_z \nabla B_{0,z} + \frac{i\omega}{c}\, \boldsymbol{e_z} \times \nabla E_{0,z}\,. \tag{11}$$

Man kann allgemein zeigen (was wir hier nicht durchführen wollen), dass sich die möglichen Wellen im Hohlwellenleiter in zwei Klassen aufteilen lassen, die man getrennt behandeln kann:

- Transversal magnetische Wellen (auch TM-Wellen, Wellen vom elektrischen Typ oder E-Wellen genannt), für die überall $B_z = 0$ (und damit $B_{0,z} = 0$).
- Transversal elektrische Wellen (auch TE-Wellen, Wellen vom magnetischen Typ oder H-Wellen genannt), für die überall $E_z = 0$ (und damit $E_{0,z} = 0$).

Wir wollen jetzt einen Hohlwellenleiter mit rechteckigem Querschnitt betrachten, dessen Seiten die Längen a (in x-Richtung) und b (in y-Richtung) haben.

(d) Wie vereinfachen sich die Gleichungen (10) und (11) für diese beiden Fälle? Zeigen Sie insbesondere, dass die transversalen Komponenten des jeweiligen Feldes durch die longitudinale (d. h. z-) Komponente bestimmt sind. Machen Sie einen Separationsansatz, um in beiden Fällen aus (8) bzw. (9) die z-Komponente des elektrischen bzw. magnetischen Feldes zu berechnen.

(e) Welchen Typs ist die Welle mit der kleinsten möglichen Frequenz, die man als kritische Frequenz ω_c bezeichnet? Wie groß ist ω_c?

S 64 Energie und Impuls ebener Wellen (5 Punkte)

Wir schreiben elektromagnetische Wellen oft in Form komplexer Vektoren. Physikalisch relevant ist aber nur der Realteil.

(a) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass für einen komplexwertigen Vektor $\boldsymbol{a}$ im allgemeinen $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{a}^2 \neq (\mathrm{Re}\,\boldsymbol{a})^2$, wobei $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^*)/2$.

(b) Es seien $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$ und $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$. Geben Sie einen Ausdruck für $d = (\mathrm{Re}\,\boldsymbol{a})\cdot(\mathrm{Re}\,\boldsymbol{b})$ an. Was ergibt sich für $\langle d\rangle_t$, d. h. für den zeitlichen Mittelwert von d über eine Periode $T = (2\pi)/\omega$?

Wir wollen nun eine ebene elektromagnetische Welle mit

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{k}}{k} \times \boldsymbol{E} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{k} = 0 \tag{14}$$

im Vakuum betrachten. Separieren Sie im Folgenden die Orts- und Zeitabhängigkeit der Felder wie in Aufgabenteil (b).

(c) Bestimmen Sie die Energiedichte u der Welle sowie ihr zeitliches Mittel $\langle u\rangle_t$. Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\boldsymbol{S}$ und sein zeitliches Mittel $\langle \boldsymbol{S}\rangle_t$. Wie hängen u und $\boldsymbol{S}$ zusammen, und wie $\langle u\rangle_t$ und $\langle \boldsymbol{S}\rangle_t$? Wie lässt sich das Resultat interpretieren?

Hinweis: Drücken Sie dabei überall das magnetische durch das elektrische Feld aus.

(d) Geben Sie die Impulsdichte $\boldsymbol{g}$ des elektromagnetischen Feldes und ihr zeitliches Mittel $\langle \boldsymbol{g}\rangle_t$ an.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed13.html