

Teilchen im elektromagnetischen Feld

1) Hamilton operator

Elektromagnetisches Feld \vec{E}, \vec{B} wird beschrieben durch Potentiale $\phi(\vec{x}, t), \vec{A}(\vec{x}, t)$:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Betrachte dann Bewegung eines Teilchens der Masse m und Ladung e in diesem Feld.

Hamilton-Funktion ist klassisch

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi,$$

wobei \vec{p} kanonischer Impuls.

(Diese Hamilton-Fkt. führt auf die bekannte Lorentzkraft.)

Gemäß Korrespondenzprinzip erhält man den q.m. Hamiltonoperator durch Ersetzung

$$\vec{x} \rightarrow \vec{Q} \text{ Ortsoperator}$$

$$\vec{p} \rightarrow \vec{P} \text{ Impulsoperator.}$$

Wir haben also als Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{\Pi} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{Q}, t) \right)^2 + e\phi(\vec{Q}, t)$$

und die zugehörige zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle.$$

Das ergibt in Ortsdarstellung

$$H(\vec{A}, \phi) = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}, t) \right)^2 + e\phi(\vec{x}, t) \quad (1)$$

Die Größe $\left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)$ nennt man oft den "kinetischen Impuls",

$$\vec{\Pi} = m \dot{\vec{x}} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}.$$

Beachte, daß die Komponenten des entsprechenden kinetischen Impuls-Operators

$$\Pi_i = -i\hbar \nabla_i - \frac{e}{c} A_i(\vec{x}, t) \quad (\text{in Ortsdarst.})$$

nicht miteinander vertauschen:

$$[\Pi_i, \Pi_j] = i\hbar \frac{e}{c} \epsilon_{ijk} B_k.$$

2) Eichinvariant

In klassischer Elektrodynamik sind die Potentiale nur Hilfsgrößen. Für jede Funktion $\Lambda(\vec{x}, t)$ ergeben sich aus den ungleichten Potentiale

$$\left. \begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} - \nabla \Lambda \\ \phi' &= \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned} \right\} (2)$$

dieselben beobachtbaren Felder \vec{E}, \vec{B} .

Hier treten die Potentiale aber direkt im Hamiltonoperator (und damit in der Schrödingergleichung) auf!

Die Eichtransformation (2) kann aber durch eine entsprechende Phasentransformation der Wellenfunktion kompensiert werden.

Es gilt:

Die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H(\vec{A}, \phi) \psi$$

mit dem Hamiltonoperator (1) behält bei Umkehrung der Potentiale nach (2) und der Phasentransformation der Wellenfunktion

$$\psi'(\vec{x}, t) = \exp\left[-\frac{ie}{\hbar c} \Lambda(\vec{x}, t)\right] \psi(\vec{x}, t) \quad (3)$$

ihre Form, d.h.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = H(\vec{A}', \phi') \psi' \quad (4)$$

Beweis:

Betrachte linke Seite von (4) (mit (3)):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \Lambda\right) i\hbar \left[-\frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]$$

Für die rechte Seite berechne zunächst

$$\begin{aligned} (-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{A}') \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \Lambda\right) \psi &= \\ &= \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \Lambda\right) (-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{A}) \psi \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} (-it\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{A})^2 \psi' &= \\ &= \frac{1}{2m} \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \Lambda\right) (-it\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{A})^2 \psi \end{aligned}$$

Damit wird (4) zu

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \Lambda\right) i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \Lambda\right) \frac{e}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \psi &= \\ = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \Lambda\right) \frac{1}{2m} (-it\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{A})^2 \psi &+ \\ + \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \Lambda\right) \left[e\phi + \frac{e}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right] \psi, \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi = \frac{1}{2m} (-it\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{A})^2 \psi + e\phi \psi,$$

d.h. zur Schrödingergl. für die ursprünglichen Potentiale.

□

Beachte: die Phase der transformierten Wellenfunktion ψ' ist nicht messbar!
(Wahrscheinlichkeitsdichte $\sim |\psi|^2$).

Man kann auch umgekehrt vorgehen:

Bei elektrisch geladenen Teilchen ändern sich die beobachtbaren Größen nicht, wenn man "global umlicht",

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

Bei ausgedehnten Systemen bedingt dies einen "Feynmanparallelismus" (H. Weyl).

Sein Vorschlag: Fordere lokale

Eichinvarianz (3). Dann muß es Potentiale \vec{A}, ϕ geben, die wie in (1) im Hamiltonoperator stehen und nach (2) umgeleitet werden.

Dieses Eichprinzip bildet die Grundlage der wichtigsten fundamentalen Theorien der heutigen Physik. Beispiele sind:

Elektrodynamik (bzw. QED),
elektroschwache Theorie, QCD,
allgemeine Relativitätstheorie.

3) Aharonov - Bohm - Effekt -

Effekte von \vec{A} im magnetfeldfreien Raum

Auch wenn Teilchen sich nur im magnetfeldfreien Raum bewegen, können Effekte durch \vec{A} auftreten - falls das Gebiet, in dem die Teilchen sich bewegen, nicht einfach zusammenhängend ist.

Betrachte eine Spule entlang der z-Achse, unendlich lang mit Radius R_s . Innerhalb der Spule ist Magnetfeld konstant, $\vec{B} = (0, 0, B)$. Außerhalb der Spule ist das Magnetfeld null, $\vec{B} = 0$.

Das zugehörige Vektorpotential \vec{A} muß aber auch außerhalb der Spule von null verschieden sein! Betrachte hierzu Linienintegral entlang Kreis mit Radius $R > R_s$ in x-y-Ebene, der Spule umschließt.

Für das Linieneintegral gilt (Stokes)

$$\oint \vec{A}(\vec{x}'(s)) d\vec{s} = \int_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{A}) dx dy$$

mit

$$\mathcal{F} : x^2 + y^2 \leq R^2$$

weil Weg
Spule umschließt

Da $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ also

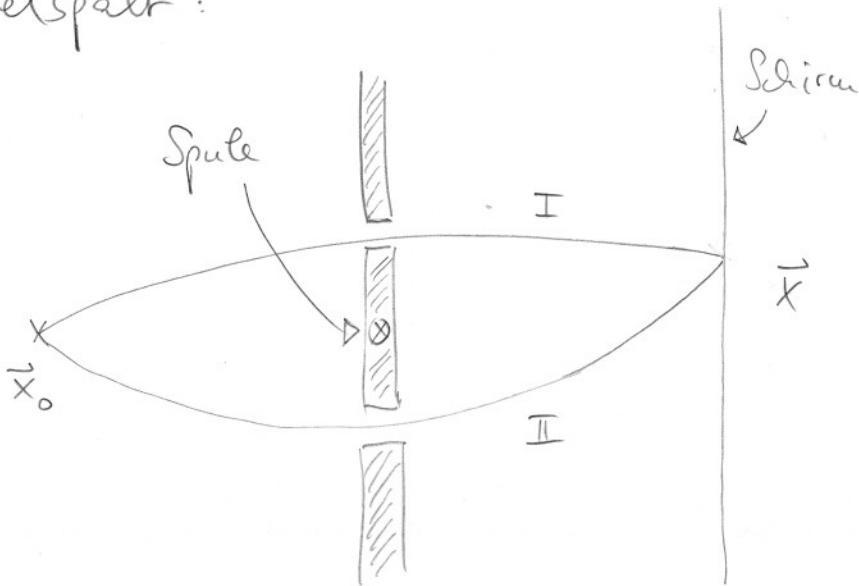


$$\oint \vec{A}(\vec{x}'(s)) d\vec{s} = \int_{\mathcal{F}} \vec{B} dx_1 dx_2 = \phi_m \neq 0$$

wobei ϕ_m der magnetische Fluß durch \mathcal{F} ist.

Aharonov - Bohm - Effekt (s.a. Übungen)

Betrachte folgende Versuchsanordnung mit Doppelspalt:



Sei $\psi^I(x, t)$ Lösung der Schrödingergl., die Elektronenstrahl entlang Pfad I beschreibt.

Die Lösung bei eingeschaltetem Feld hängt mit der Lösung bei ausgeschaltetem Feld zusammen: (\rightarrow Übung)

$$\psi_{\text{B}}^{\text{I}}(\vec{x}) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \Lambda_{\text{I}}(\vec{x})\right) \psi_{\text{B}=0}^{\text{I}}(\vec{x})$$

mit

$$\Lambda_{\text{I}}(\vec{x}) = \int_{\text{I}(\vec{x}_0, \vec{x})} \vec{A}(\vec{x}'(s)) \vec{ds}$$

\leftarrow Linienintegral entlang Weg I

d.h.

$$\begin{aligned} (-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}))^2 \exp\left[\frac{ie}{\hbar c} \Lambda_{\text{I}}(\vec{x})\right] \psi_{\text{B}=0}^{\text{I}} &= \\ &= \exp\left[\frac{ie}{\hbar c} \Lambda_{\text{I}}(\vec{x})\right] (-i\hbar\nabla)^2 \psi_{\text{B}=0}^{\text{I}}, \end{aligned}$$

Wenn also $\psi_{\text{B}=0}^{\text{I}}$ Lösung der Schrödingergl. ohne Feld, so ist $\psi_{\text{B}}^{\text{I}}$ Lösung mit Feld. Analog erhält man Lösung für Pfad II.

Wenn bei ausgeschaltetem Feld an der Stelle \vec{x} (zum Beispiel) Auslöschung vorliegt, bekommen die Wege I und II bei eingeschaltetem Feld zusätzliche Phasen differenz,

$$\begin{aligned} \frac{ie}{\hbar c} \Lambda_{\text{I}}(\vec{x}) - \frac{ie}{\hbar c} \Lambda_{\text{II}}(\vec{x}) &= \frac{ie}{\hbar c} \oint \vec{A}(\vec{x}'(s)) \overline{ds} \\ &= \frac{ie}{\hbar c} \int \mathbb{B} \, dx_1 \, dx_2 \\ &= \frac{ie}{\hbar c} \Phi_m \end{aligned}$$

↑
magn. Fluß durch
Querschnitt d. Spule

weil der aus I und II zusammengesetzte
Weg die Spule umschließt.

→ Das Interferenzmuster ändert sich!

Beachte: Die Elektronen bewegen sich
ausschließlich im magnetfeldfreien Raum,
wo $\vec{\mathbb{B}} = 0$ (aber $\vec{A} \neq 0$)!

Demnach hängt die (meßbare)
Phasenverschiebung nicht von \vec{A} selbst
ab, sondern vom meßbaren Fluß
des Magnetfelds durch die von
I und II eingeschlossene Fläche!

Dieses Prinzip findet Anwendung in SQUIDS
(“superconducting quantum interference device”) zur
Messung kleiner Magnetfelder.

→ sehr empfindlich!, typische Einheit $\frac{\hbar c}{e} = 0.66 \cdot 10^{-7} \text{ G cm}^2$

4) Elimination des Potentials, konstantes Magnetfeld

Es ist immer möglich, das Potential \vec{A} aus dem Hamiltonoperator zu eliminieren.
Wir wollen dies hier für ein konstantes Magnetfeld \vec{B} betrachten.

Wir wählen die sog. "koordinatenrichtung"
 $\vec{x} \cdot \vec{A} = 0$, $\vec{A}(\vec{0}) = 0$.

Für statisches Feld gilt

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int_0^1 d\lambda \lambda [\vec{B}(\lambda \vec{x}) \times \vec{x}],$$

wie man explizit nachrechnet.

Dieser Zusammenhang ist nicht-lokal,
d.h. \vec{B} muß auf gesamten Strahl
von $\vec{0}$ nach \vec{x} bekannt sein, um
 $\vec{A}(\vec{x})$ zu erhalten.

Für konstantes Magnetfeld vereinfacht
sich das Integral zu

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{x})$$

Damit (und mit $\phi=0$) wird der Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{2c} (\vec{B} \times \vec{x}) \right)^2$$

$$= \frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 - 2(-i\hbar) \frac{e}{2c} (\vec{B} \times \vec{x}) \cdot \nabla + \left(\frac{e}{2c} \right)^2 |\vec{B} \times \vec{x}|^2 \right)$$

wobei $\nabla \cdot [\vec{B} \times \vec{x}] = 0$ benutzt wurde.

Es ist

$$-i\hbar [\vec{B} \times \vec{x}] \cdot \nabla = -i\hbar \sum_{j,k,l} \varepsilon_{jkl} B_j x_k \partial_l$$

$$= -i\hbar \vec{B} \cdot (\vec{x} \times \nabla)$$

$$= \vec{B} \cdot \vec{L}$$

und damit

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e}{2mc} \vec{B} \cdot \vec{L} + \frac{1}{2m} \left(\frac{e}{2c} \right)^2 |\vec{B} \times \vec{x}|^2$$

Für $\vec{B} = (0, 0, B)$ also

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e}{2mc} B L_3 + \frac{1}{2m} \left(\frac{e}{2c} \right)^2 B^2 (x_1^2 + x_2^2)$$

Unter Laborbedingungen ist im Atom oft $\frac{1}{2m} \left(\frac{e}{2c} \right)^2 |\vec{B} \times \vec{x}|^2 \ll \frac{e}{mc} B \hbar$ und damit vernachlässigbar. Ausnahme: starke Felder, oder wenn $\langle L_3 \rangle = 0$.

Der zweite Term, $-\frac{e}{2mc} \vec{L} \cdot \vec{B}$, trägt zum Paramagnetismus bei. Der dritte Term, $\frac{1}{2m} \left(\frac{e}{2c}\right)^2 |\vec{B} \times \vec{r}|^2$, ergibt den Diamagnetismus.

5) Zeeman - Effekt (s. a. Übungen)

Für ein Wasserstoffatom in (schwachen) Magnetfeld schalten wir also den Hamiltonoperator

$$H = H_0 - \frac{e}{2mc} \vec{B} \cdot \vec{L}$$

← Masse m_e , um Verwechslung mit L_z -Quantenzahl zu vermeiden

wobei H_0 der Hamiltonoperator für ein Elektron im Coulombpotential ist,

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{r}$$

Wir wollen hier den Spin des Elektrons vernachlässigen (\rightarrow "normaler" Zeeman - Effekt).

Man findet, daß die Coulomb - Wellenfunktionen auch Eigenfunktionen zu H sind,

$$H \psi_{nlm} = \left(-\frac{R_y}{n^2} - \frac{e\hbar B}{2mc} m \right) \psi_{nlm}$$

$$\omega_L = -\frac{eB}{2mc} = \frac{e_0 B}{2m_0 c} \text{ heißt } \underline{\text{Larmor - Frequenz}}.$$

6) Spin - $\frac{1}{2}$ - Teilchen im Magnetfeld

Wir hatten gesehen, daß der Drehimpuls \vec{L} eines Teilchens zu einem magnetischen Moment führt,

$$\vec{\mu}_L = \frac{e}{2mc} \vec{L},$$

das an das Magnetfeld koppelt,

$$H = \frac{e}{2mc} \vec{L} \cdot \vec{B} = \vec{\mu}_L \cdot \vec{B}.$$

In ähnlicher Weise führt auch der Spin \vec{S} zu einem magnetischen Moment,

$$\vec{\mu}_S = g \frac{e}{2mc} \vec{S},$$

worin $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$, und einer entsprechenden Kopplung ans Magnetfeld,

$$H = g \frac{e}{2mc} \vec{S} \cdot \vec{B} = \vec{\mu}_S \cdot \vec{B}.$$

Es gibt aber a priori keinen Grund, daß die Kopplung dieselbe Stärke hat wie beim Drehimpuls - daher der Faktor g , genannt gyromagnetischer Faktor oder Landé-Faktor.

Experimentell findet man für das Elektron $g_e \approx 2$. Es gab nutzlose Versuche, $g_e = 2$ klassisch durch eine Ladungsverteilung im Elektron zu erhalten. Die richtige Erklärung erhält man aus der relativistischen Gleichung für das Elektron (Dirac-Gleichung), woraus $g_e = 2$ folgt.

QED-Korrekturen ergeben dann

$$g_e = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} - \dots \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + \dots \right) \\ = 2.0023 \dots$$

Dieser Wert ist theoretisch sehr genau berechnet und stimmt mit dem Experiment überein. (\rightarrow genaueste Überprüfung der QED.)

Für das Proton ist das magnetische Moment analog

$$\vec{\mu}_s^p = g_p \frac{+e_0}{2m_p c} \vec{S}$$

und man würde naive $g_p = 2$ erwarten.

Experimentell ist aber $g_p \approx 2.8 g_e$,

\rightarrow Proton ist nicht elementar!

Die Größe $\frac{e\hbar}{2mc}$ heißt Magneton.

Für $m = m_e$ erhält man das sog.

Bohrsche Magneton $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$,

für $m = m_p$ das sog. Kernmagneton μ_K .

H-Atom im Magnetfeld mit Spin

Betrachte H-Atom im Magnetfeld

(s.o., \rightarrow Zeeman-Effekt), jetzt berücksichtige
aber den Spin.

Wir vernachlässigen den diamagnetischen
Term ($\sim B^2(x_1^2 + x_2^2)$, s.o.). Dann erhält
man für die Radialwellenfunktion
den Hamiltonoperator

$$H(B) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) + \frac{1}{2m_0 r^2} \vec{L}^2 + V(r) \right) \\ + \frac{e_0}{2m_0 c} B (L_3 + g_e S_3),$$

das mit $\vec{L}^2, \vec{S}^2, L_3, S_3$ vertauscht.

Sei dann

$$R_{E,lm}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi) |\chi_s\rangle$$

Eigenzustand d. H-Atoms ohne Magnetfeld.

d.h.

$$H(B) \Big|_{B=0} R_{E,lm} Y_l^m |\chi_s\rangle = E R_{E,lm} Y_l^m |\chi_s\rangle$$

Mit

$$S_3 |\chi_s\rangle = s |\chi_s\rangle, \quad s = \pm \frac{1}{2}$$

Dann ist mit Magnetfeld

$$\begin{aligned} H(B) R_{E,lm} Y_l^m |\chi_s\rangle &= \\ &= \left[H(B) \Big|_{B=0} + \frac{e_0}{2m_0 c} B (L_3 + g_e S_3) \right] R_{E,lm} Y_l^m |\chi_s\rangle \\ &= \left[E + \frac{e_0}{2m_0 c} B (\mu + g_e s) \right] R_{E,lm} Y_l^m |\chi_s\rangle \end{aligned}$$

→ Man erwartet also eine entsprechende Aufspaltung der Linien durch die Wechselwirkung des Spins mit dem Magnetfeld.

Dies wird experimentell gut bestätigt für starke Magnetfelder (→ Paschen-Back - Effekt).

Beachte: hier fehlt noch Spin-Bahn-Kopplung (wichtig bei schwachem Magnetfeld).