

# Nichtlineare Dynamik und Chaos

Heinz Horner

Institut für Theoretische Physik der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Philosophenweg 19 69120 Heidelberg

April 2011

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Dynamische Systeme</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Logistische Abbildung als Prototyp dynamischer Systeme</b>	<b>2</b>
2.1	Überblick: Fixpunkte, periodische Lösungen und Chaos . . . . .	3
2.2	Stabilität von Fixpunkten, Lyapunov Exponent . . . . .	6
2.3	Periodische Orbits . . . . .	7
2.4	Voll entwickeltes Chaos . . . . .	8
2.5	Bifurkationen . . . . .	9
2.6	Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung . . . . .	10
2.7	Lyapunov Exponent . . . . .	11
2.8	Selbstähnliches Verhalten . . . . .	12
2.9	Abschätzung der Zahl der Fenster . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen</b>	<b>14</b>
3.1	Attraktoren in kontrahierenden Systemen . . . . .	15
3.2	Fixpunkte und Grenzzyklen . . . . .	15
3.3	Lotka-Volterra-Modell . . . . .	16
3.4	Dreidimensionaler Phasenraum, Rössler-Attraktor . . . . .	18
3.5	Bäcker Abbildung . . . . .	20
3.6	Fraktale Dimension . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Konservative Systeme</b>	<b>22</b>
4.1	Hamiltonsche Mechanik . . . . .	22
4.2	Integrable Systeme . . . . .	22
4.3	Periodisch angestoßener Rotator, Standard-Abbildung . . . . .	23
4.4	Asteroiden, Ringsysteme . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Literatur</b>	<b>25</b>

# 1 Dynamische Systeme

Dynamische Systeme sind mathematische Modelle zeitabhängiger Prozesse. Beispiele finden sich nicht nur in Mathematik und Physik, sondern auch in biologischer Modellbildung und in vielen Bereichen der Wirtschaftswissenschaften. Im Allgemeinen betrachtet man autonome Systeme, i.e. Systeme ohne von Aussen aufgeprägte Zeitabhängigkeit, deren zeitliche Entwicklung nur von der Anfangsbedingung abhängt.

Der Zustand des Systems sei durch einen Punkt  $\mathbf{s}$  in einem Zustandsraum  $\mathcal{S}$  gegeben. Der Zustandsraum kann diskret oder kontinuierlich sein, oder auch ein Raum von Funktionen sein.

Diskreter Zustandsraum:

Beispiel: Menge von natürlichen Zahlen  $\{n_1, n_2 \dots n_k\}$ , die die Anzahl von Individuen verschiedener Spezien angeben.

Beispiel:  $n_i = \{0, 1\}$ : System von binären Eigenschaften, z.B. Besetzung von Gitterpunkten,

Kontinuierlicher Zustandsraum:

Beispiel: Punkt  $\mathbf{s}$  in einem  $k$ -dimensionalen Raum  $\mathcal{S} = \mathcal{R}^k$  mit Koordinaten  $\{s_1, s_2 \dots s_k\}$ .

Raum von Funktionen:

Beispiel: Funktionen  $\varphi(\mathbf{x})$ , wobei  $\mathbf{x}$  ein Vektor in einem  $d$ -dimensionalen Raum ist.

Die (zeitliche) Entwicklung des Systems kann durch eine Abbildung gegeben sein:

$$\mathbf{s}(t_{n+1}) = \mathbf{F}(\mathbf{s}(t_n)) \quad (1.1)$$

wobei wir uns auf autonome Systeme beschränken wollen, also auf Systeme bei denen  $\mathbf{F}(\mathbf{s})$  nicht explizit von der "Zeit"  $t_n$  abhängt. Im Fall eines diskreten Zustandsraums spricht man von zellulären Automaten.

Im Fall eines kontinuierlichen Zustandsraums kann die (zeitliche) Entwicklung auch durch einen Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben sein

$$\frac{d}{dt}\mathbf{s}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \quad (1.2)$$

Die zeitliche Entwicklung im Fall eines Zustandsraums von Funktionen ist im allgemeinen durch partielle Differentialgleichungen oder Integralgleichungen gegeben.

Im folgenden werden wir uns weitgehend auf Abbildungen und Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen in einem  $k$ -dimensionalen kontinuierlichem Zustandsraum beschränken.

## 2 Logistische Abbildung als Prototyp dynamischer Systeme

Ein sehr einfaches nichtlineares dynamisches System mit nur einem Freiheitsgrad ist die logistische Abbildung, die aber wesentliche Aspekte dynamischer Systeme und chaotischen Verhaltens zeigt. Sie ist gegeben durch

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad F(x) = ax(1-x) \quad (2.1)$$

Sie wurde zunächst als Modell für die Entwicklung von Populationen formuliert, in dem nicht nur die Reproduktionsrate, sondern auch eine beschränkte Nahrungsresource berücksichtigt wird. In einem gegebenen Zeitraum, z.B. einem Jahr, wächst die Population durch Reproduktion um einen Faktor  $f_r$ . Die Sterberate hängt vom Verhältnis von Population zu Resource ab, also  $f_s = f_o + f' N/R$ . Damit erhält man

$$N_{n+1} = (1 + f_r - f_s) N_n = (1 + f_r - f_o) N_n - \frac{f'}{R} N_n^2 \quad (2.2)$$

Die obige Form (2.1) erhält man durch die Substitution

$$a = 1 + f_r - f_o \quad x = \frac{f'}{1 + f_r - f_o} \frac{N}{R} \quad (2.3)$$

Ganz ähnlich kann der Lebenszyklus eines neu eingeführten Produkts modelliert werden. Die Verkaufsrate des neuen Produkts hängt von seinem Bekanntheitsgrad, also von der Zahl der schon verkauften Produkte ab. Eine Sättigung tritt ein, wenn schon jeder potentielle Konsument das Produkt gekauft hat. Die Zahl der in einer bestimmten Periode verkauften Produkte folgt z.B.

$$N_{n+1} - N_n = c N_n (1 - N_n/\bar{N}) \quad (2.4)$$

Auch hier erhält man (2.1) mit

$$a = 1 + c \quad x = \frac{c}{1 + c} \frac{N}{\bar{N}} \quad (2.5)$$

Auch manche Regelungsprozesse können auf die logistische Abbildung zurückgeführt werden. Dabei hat man eine zu regelnde Größe  $r$ , die von einer Stellgröße  $s$  abhängt

$$r = R(s) \quad (2.6)$$

Der Sollwert sei  $\bar{r}$  und bei Abweichung von diesem Sollwert werde die Stellgröße proportional zu dieser Abweichung geändert, also

$$s_{n+1} - s_n = c (R(s_n) - \bar{r}) \quad (2.7)$$

Der Sollwert  $\bar{r}$  werde bei einem Stellwert  $\bar{s}$  erreicht, wobei

$$R(\bar{s}) = \bar{r} \quad (2.8)$$

Nähert man die Funktion  $R(s)$  durch eine Parabel an

$$R(s) = \bar{r} + R_1 (s - \bar{s}) + R_2 (s - \bar{s})^2 \quad (2.9)$$

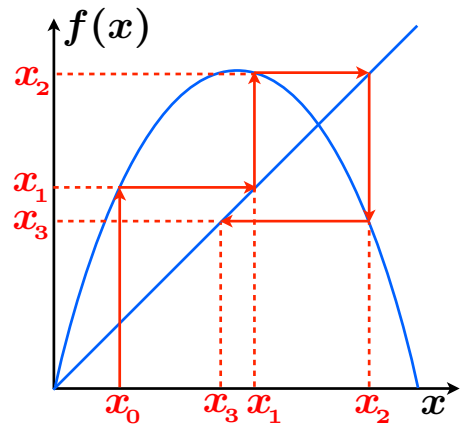
liefert die Substitution

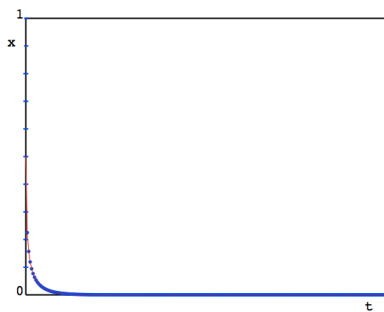
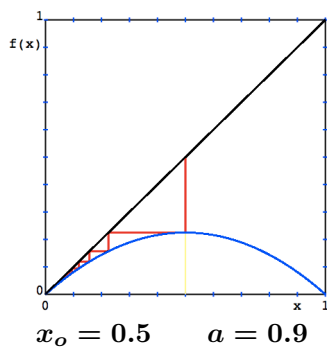
$$a = 1 + c R_1 \quad x = -\frac{c R_2}{1 + c R_1} (s - \bar{s}) \quad (2.10)$$

wieder die Standardform (2.1) der logistischen Abbildung. Der Kontrollparameter  $a$  der logistischen Abbildung ist damit durch die Stärke  $c$  der Rückkopplung gegeben.

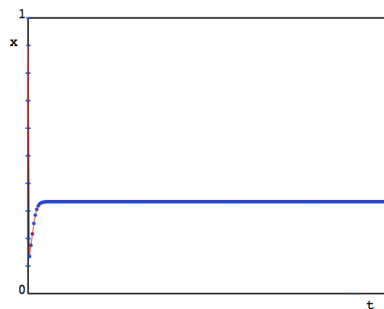
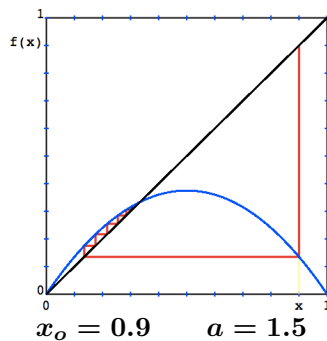
## 2.1 Überblick: Fixpunkte, periodische Lösungen und Chaos

Eine grafische Darstellung der Iterationsschritte der Abbildung, wie in der Figur gezeigt, ist für qualitative Diskussionen nützlich.

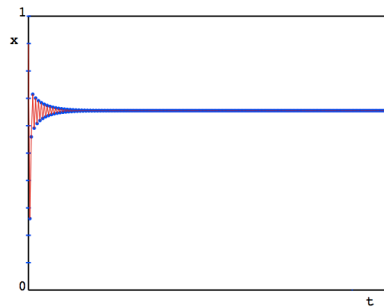
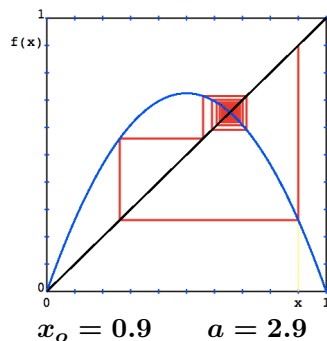




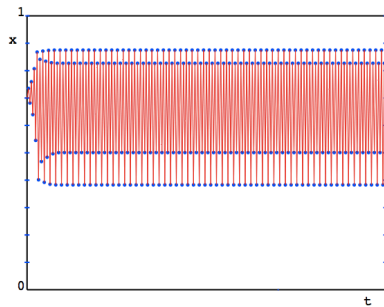
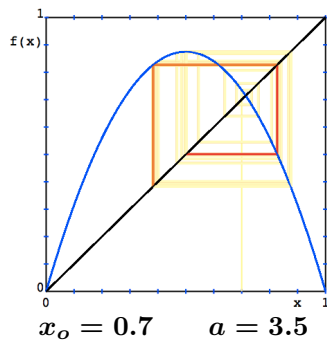
Attraktiver Fixpunkt  $x^* = 0$   
für  $0 < a < 1$



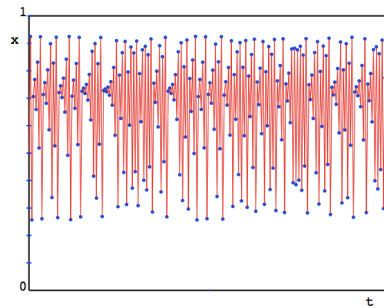
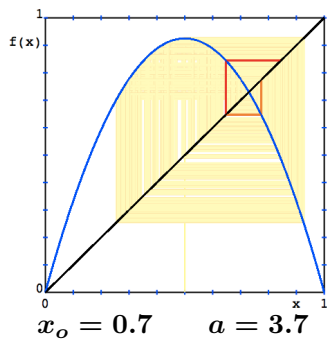
Repulsiver Fixpunkt  $x^* = 0$   
Attraktiver Fixpunkt  $x^* > 0$   
für  $1 < a < 2$   
Monotone Annäherung.



Repulsiver Fixpunkt  $x^* = 0$   
Attraktiver Fixpunkt  $x^* > 0$   
für  $2 < a < 3$   
Oszillierende Annäherung.  
Superstabiler Orbit für  $a = 2$

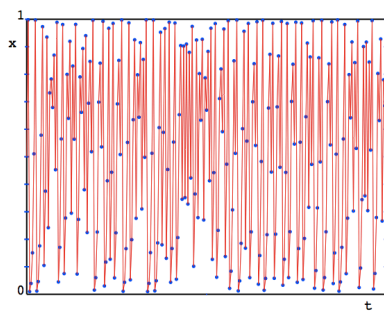
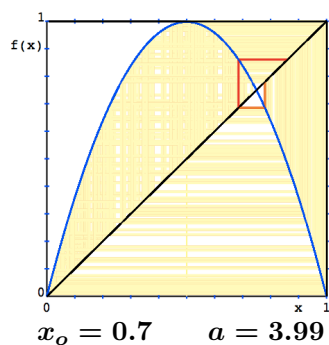


Repulsive Fixpunkte  $x^* = 0$  und  $x^* > 0$   
Attraktiver Periode 2 Orbit  
für  $3 < a < 3.447$   
Für  $3.447 < a < 3.560$  Periode 4, 8, 16  
...

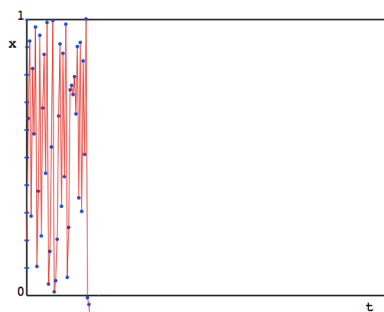
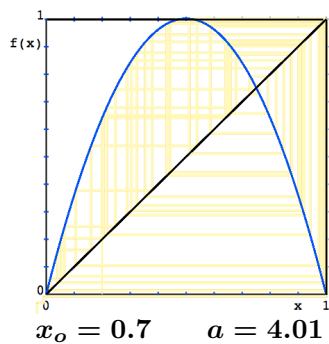


Repulsive Fixpunkte  $x^* = 0$  und  $x^* > 0$   
Chaos und periodische Orbits  
für  $3.560 < a < 4.0$

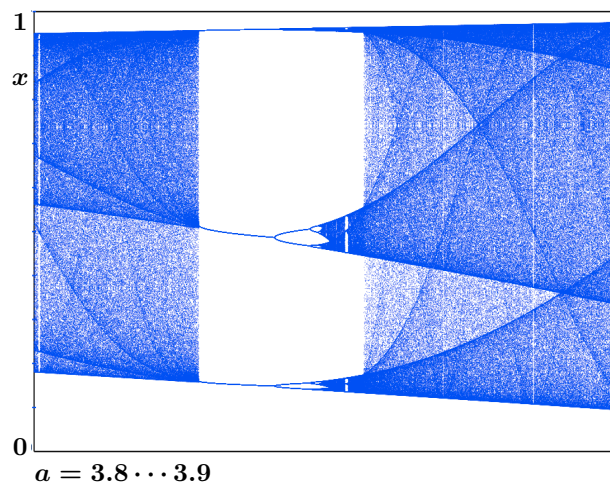
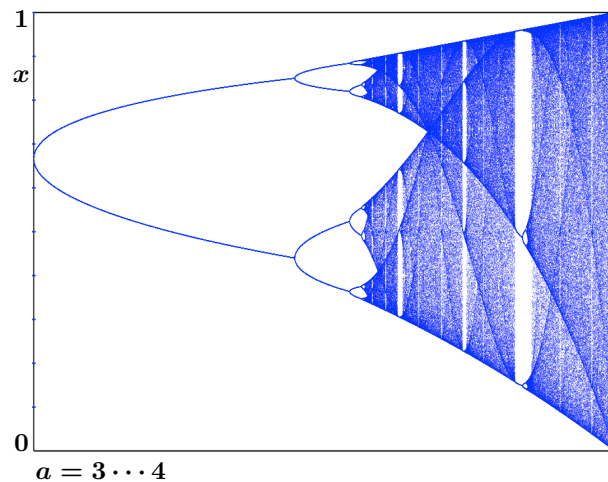
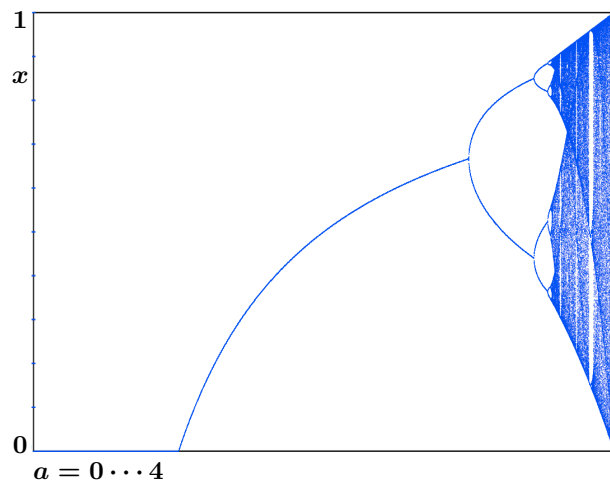




Für  $a = 4$  voll entwickeltes chaotisches Verhalten im Bereich  $0 < x < 1$



Für  $a > 4$  kann die Trajektorie den Bereich  $0 < x < 1$  verlassen (Krise)



Bifurkationsdiagramm:

Für jeden Wert von  $a$  werden zunächst ca. 1000 Iterationen zur Berücksichtigung von Einschwingvorgängen durchgeführt. Die Nächsten ca. 200 Iterationswerte werden als Punkt eingezeichnet. Für  $a > 3.569945672$  zeigt sich chaotisches Verhalten mit eingebetteten periodischen Fenstern. Diese zeigen selbstähnliche Strukturen.

## 2.2 Stabilität von Fixpunkten, Lyapunov Exponent

Ein Fixpunkt  $x^*$  ist definiert durch

$$f(x^*) = x^* \quad (2.11)$$

In der Nähe des Fixpunktes kann die Abbildung nach  $\delta = x - x^*$  entwickelt werden

$$x_{n+1} = x^* + \delta_{n+1} = f(x^*) + f'(x^*) \delta_n \quad \delta_{n+1} = f'(x^*) \delta_n \quad (2.12)$$

Man erhält als Lösung

$$\delta_n = \pm e^{\lambda n} \delta_0 \quad e^{\lambda} = |f'(x^*)| \quad \pm = \text{sign}(f'(x^*)) \quad (2.13)$$

und

$$\delta_n^2 = e^{2\lambda n} \delta_0^2 \quad (2.14)$$

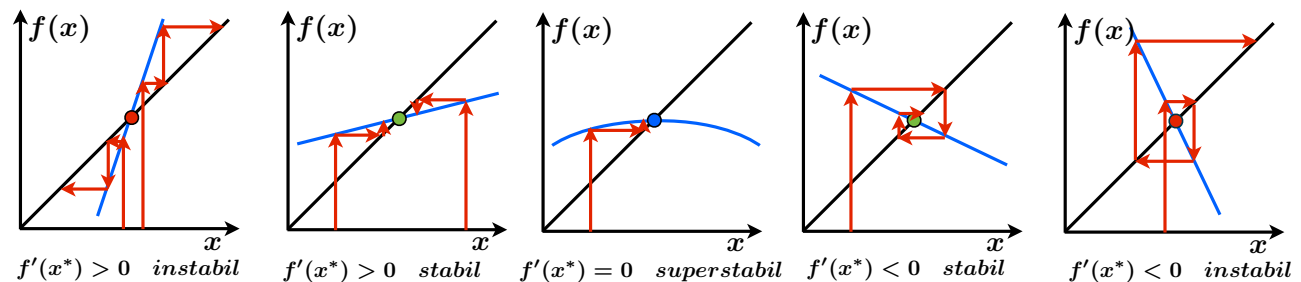
Den Exponenten  $\lambda$  bezeichnet man als Lyapunov Exponent. Für einen stabilen Fixpunkt ist  $|f'(x^*)| < 1$  und damit  $\lambda < 0$ . Betrachtet man zwei benachbarte Trajektorien mit Anfangswerten  $x_0$  und  $y_0 = x_0 + \varepsilon_0$ , so gilt für kleine  $\varepsilon$  entsprechend

$$\varepsilon_n^2 = e^{2\lambda n} \varepsilon_0^2 \quad (2.15)$$

Superstabiler Fixpunkt:  $f'(x^*) = 0$  und  $\lambda \rightarrow -\infty$

$$\delta_{n+1} = \frac{1}{2} f''(x^*) \delta_n^2 = \left( \frac{1}{2} f''(x^*) \right)^{n+1} \delta_0^{2^{n+1}} \quad (2.16)$$

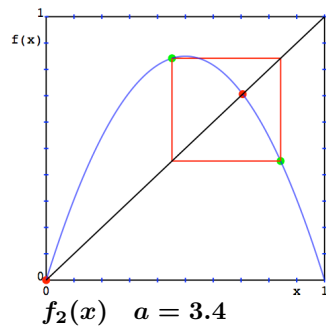
Hier ist die Konvergenz sehr viel schneller.



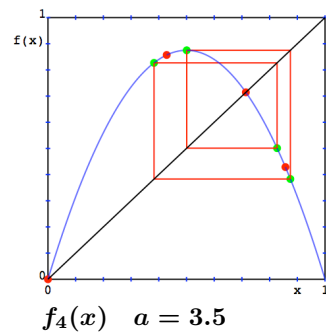
## 2.3 Periodische Orbits

Einem  $n$ -periodischem Orbit einer Abbildung  $f(x)$  entsprechen  $n$  Fixpunkte in der  $n$ -fach iterierten Abbildung  $f_n(x)$ .

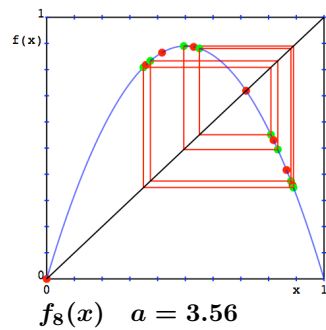
Beispiele:



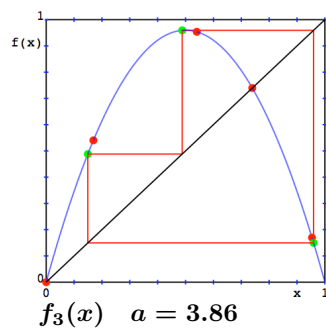
2-periodischer Orbit



4-periodischer Orbit



8-periodischer Orbit



3-periodischer Orbit

## 2.4 Voll entwickeltes Chaos

Für  $a = 4$  wird sowohl der Bereich  $x = 0 \cdots \frac{1}{2}$ , wie auch der Bereich  $x = \frac{1}{2} \cdots 1$  auf den vollen Bereich  $f(x) = 0 \cdots 1$  abgebildet. Damit kann aus einem Bildpunkt  $f(x)$  nicht mehr eindeutig auf den Ausgangspunkt geschlossen werden. Die Abbildung ist damit nicht invertierbar.

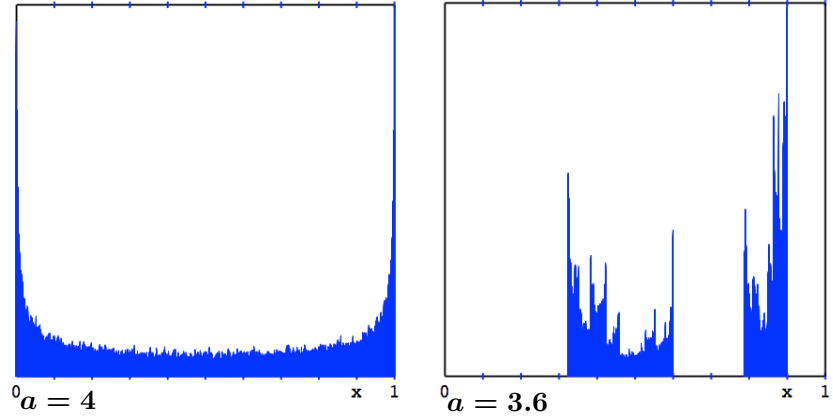
Betrachtet man Ausgangspunkte mit einer Dichte  $p(x)$ , ist die Dichte der Bildpunkte

$$p_f(x) = \int_0^1 dy p(y) \delta(f(y) - x) \quad (2.17)$$

Für eine sogenannte invariante Dichte  $\mu(x)$  gilt  $\mu_f(x) = \mu(x)$ . Für die logistische Abbildung mit  $a = 4$  existiert eine kontinuierliche invariante Dichte

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \quad (2.18)$$

Die Existenz einer kontinuierlichen invarianten Dichte ist ganz allgemein ein mögliches Kriterium für chaotisches Verhalten.



Betrachtet man zwei benachbarte Trajektorien mit Anfangspunkt  $x_0$  und  $x_0 + \delta_0$ , dann ist, für kleine  $\delta_0$  nach einer Iteration (siehe (2.13))

$$\delta_1 = f(x_0 + \delta_0) - f(x_0) = f'(x) \delta_0 = \pm e^{\lambda(x)} \delta_0 \quad (2.19)$$

Nach  $n$  Iterationen ist

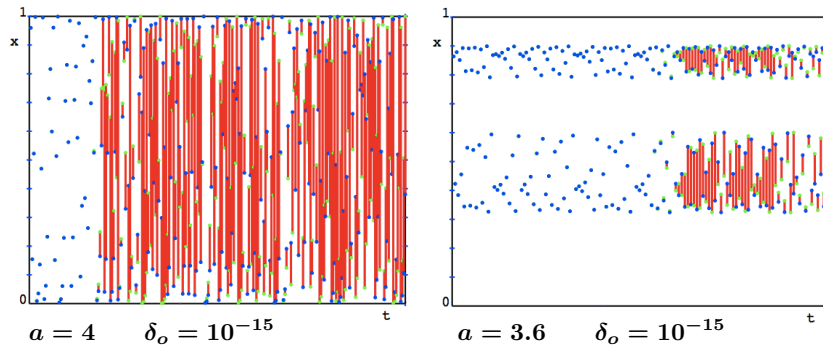
$$\delta_n = \pm \prod_{l=1}^n e^{\lambda(x_{n-l})} \delta_0 = e^{\sum_{l=1}^n \lambda(x_{n-l})} \delta_0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\delta_0 \rightarrow 0} e^{n\lambda} \delta_0 \quad (2.20)$$

Die Werte  $x_n$  durchlaufen für  $n \rightarrow \infty$  alle Punkte mit einer Rate, die durch die invariante Dichte gegeben ist. Damit ist der Lyapunov gegeben durch

$$\lambda = \int dx \mu(x) \ln(|f'(x)|) \quad (2.21)$$

Diese Definition gilt auch für Fixpunkte oder periodische Orbits, wobei hier die invariante Dichte durch eine Summe von  $\delta$ -Funktionen gegeben ist.

Für die logistische Abbildung mit  $a = 4$  erhält man  $\lambda = \ln(2) = 0.6931\dots$



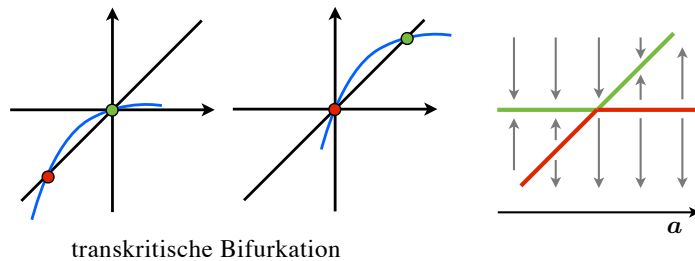
Für  $a = 4$  verdoppelt sich damit die Abweichung im Mittel pro Schritt. Bei einem Anfangswert  $\delta_0 = 10^{-15}$  ist nach ca. 50 Schritten ein Wert  $\sim 1$  erreicht.

Ähnliches Verhalten zeigt sich auch für andere Werte des Kontrollparameters.

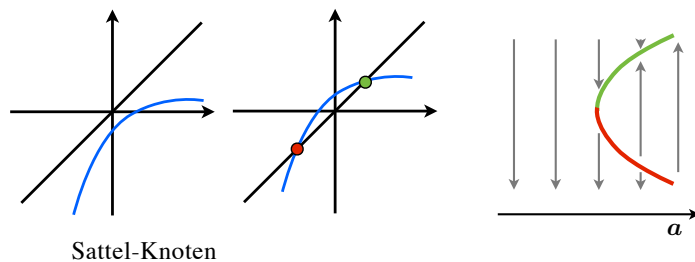
Dies zeigt, dass auch bei extrem genauer Kenntnis der Anfangswerte in einem chaotischen System, eine Vorhersage nur über kürzere Zeiten möglich ist. Ein positiver Lyapunov Exponent ist, neben der Existenz einer kontinuierlichen invarianten Dichte, eine alternative Charakterisierung chaotischer Dynamik.

## 2.5 Bifurkationen

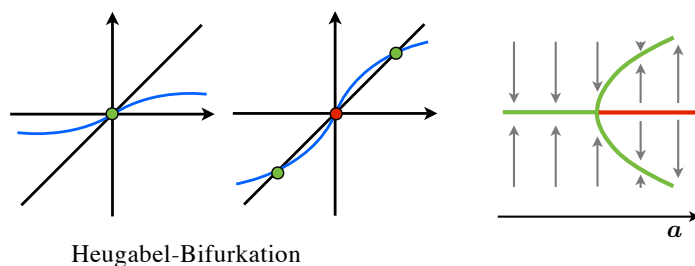
Falls  $f(x)$  von einem Parameter abhängt, kann sich die Existenz oder Stabilität von Fixpunkten an speziellen Werten des Parameters, sogenannten Bifurkationen, ändern.



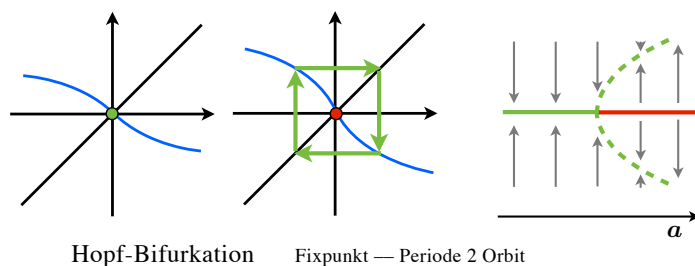
Bei einer "transkritischen Bifurkation" vertauschen zwei Fixpunkte, ein attraktiver und ein repulsiver, ihre Stabilität.



An einem Sattel-Knoten entsteht ein Paar von Fixpunkten, von denen einer attraktiv und der andere repulsiv ist.

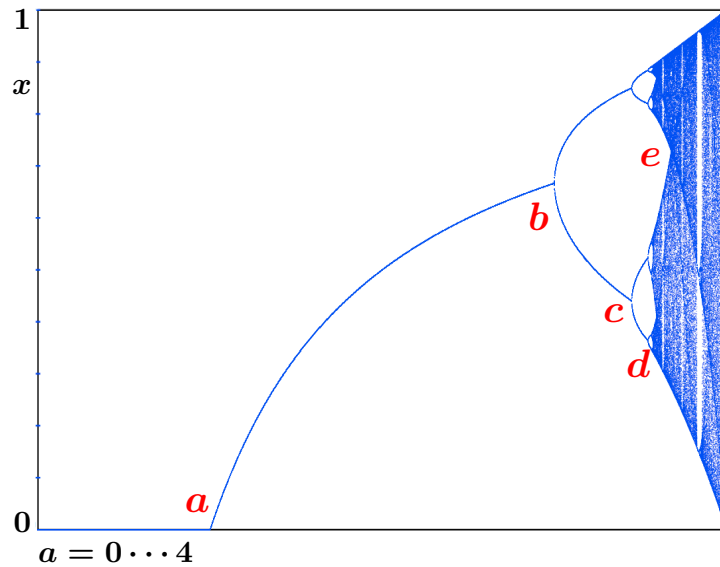


An einer Heugabel-Bifurkation (Pitchfork) entsteht aus einem attraktiven Fixpunkt ein Paar von attraktiven Fixpunkten und ein dazwischenliegender repulsiver Fixpunkt. Bei einer invertierten Heugabel-Bifurkation ist die Rolle von attraktiv und repulsiv vertauscht.

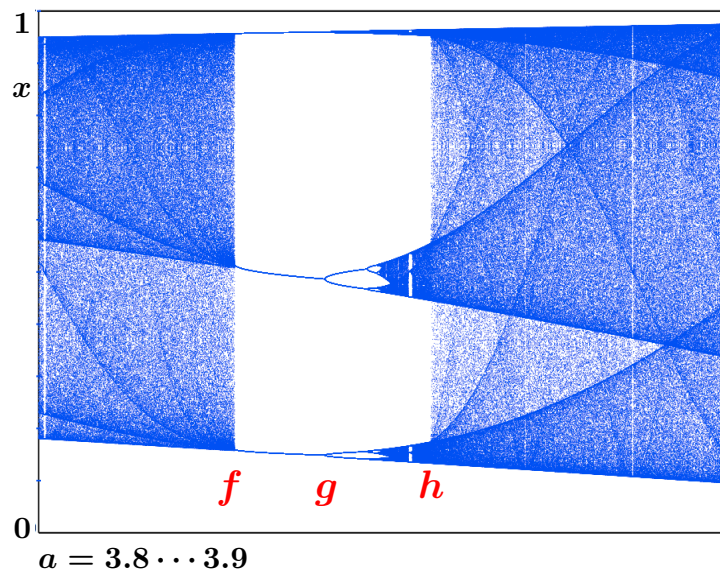


An einer Hopf-Bifurkation entsteht aus einem attraktiven Fixpunkt ein repulsiver Fixpunkt und ein attraktiver Periode 2 Orbit. Auch hier gibt es die inverse Verzweigung.

## 2.6 Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung



- a) Transkritische Bifurkation  
 $x^* = 0 \rightarrow x^* > 0$  für  $a = 1$
- b) Hopf-Bifurkation (Heugabel-Bifurkation) zu Periode 2 für  $a = 3$
- c) Hopf-Bifurkation zu Periode 4 für  $a = 3.446$
- d) Ende der Periodenverdopplungskaskade  $a = 3.569945672$
- e) Bandverschmelzungspunkt von Zweiband- zu Einbandchaos für  $a = 3.68$

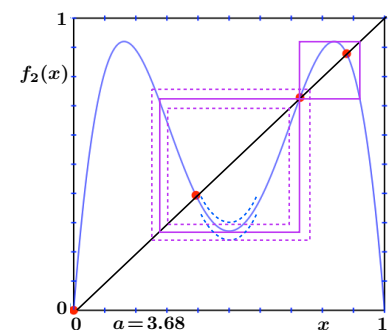


- f) Sattel-Knoten-Bifurkation zu Periode 3 für  $a = 3.828$
- g) Hopf-Bifurkation zu Periode 6 für  $a = 3.842$
- h) Krise-Bifurkation von Dreiband- zu Einbandchaos für  $a = 3.857$

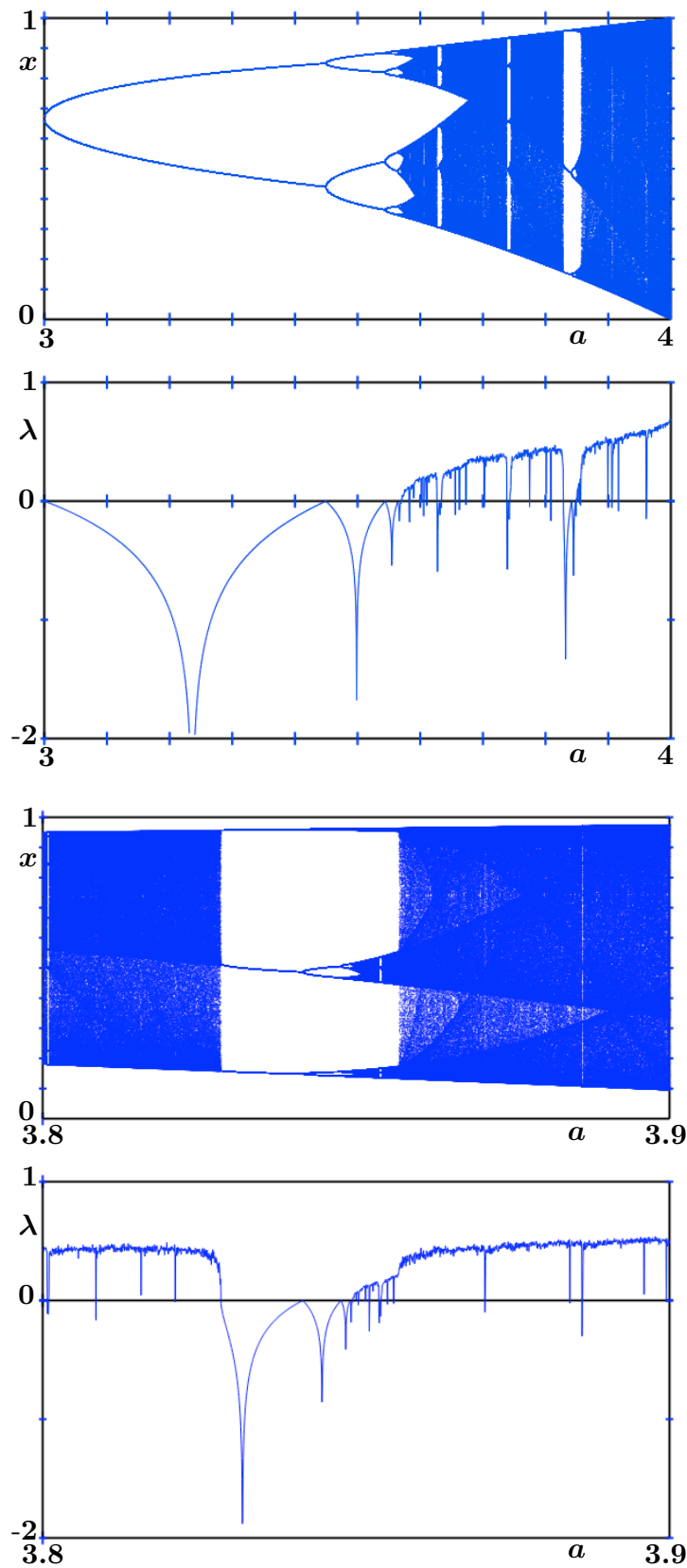
Zwischen  $a = 3$  und  $a = 3.569945672$  findet man eine Kaskade von Periodenverdopplungen.

Im Folgendem Intervall bis  $a = 3.68$  findet sich eine inverse Kaskade von Bandverschmelzungen chaotischer Bänder. An den Bandverschmelzungspunkten wird ein Teilbereich wieder vollständig auf sich selbst abgebildet. Die invariante Dichte ist, wie auch bei  $a = 4$  kontinuierlich.

Eingebettet in chaotische Bereiche finden sich "Fenster" mit periodischen Orbits, Periodenverdopplung und Bändern chaotischer Dynamik.



## 2.7 Lyapunov Exponent

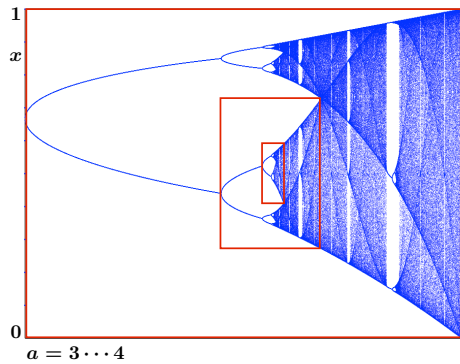


Der Lyapunov Exponent ist im Bereich der Periodenverdopplung  $\lambda \leq 0$ , wobei an den Hopf-Bifurkationspunkten  $\lambda = 0$  ist. An den superstabilen Punkten geht  $\lambda \rightarrow -\infty$ . Im chaotischen Bereich sind periodische Fenster mit  $\lambda < 0$  eingebettet, wobei allerdings nur Fenster mit nicht allzu großer Periode aufgelöst werden. Die Bereiche, in denen  $\lambda > 0$  gefunden wird, enthalten sehr enge Fenster mit hoher Periode. Dabei findet man sehr lange Transienten, die bei numerischen Rechnungen einen effektiven Lyapunov Exponenten  $\lambda > 0$  vortäuschen.

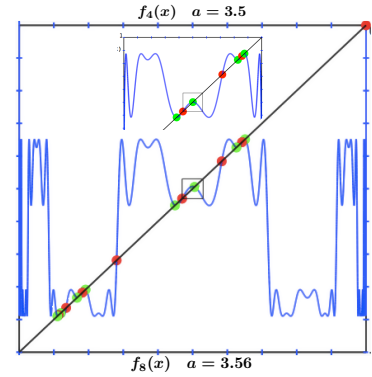
Der Ausschnitt zeigt den Lyapunov Exponenten im Bereich des Periode 3 Fensters. Das Bifurkationsdiagramm und der Lyapunov Exponenten ähnelt dem Verlauf im gesamten Bereich  $a = 0 \dots 4$ . Am Übergang von Dreiband- zu Einbandchaos (Krise) springt der Lyapunov Exponent.



## 2.8 Selbstähnliches Verhalten



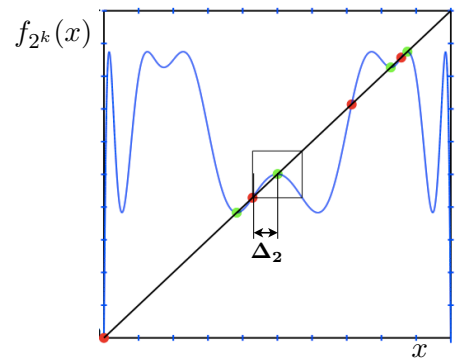
Durch Skalenänderung (und Spiegelung) kann man Teile des Bifurkationsdiagramms in guter Näherung auf den gesamten Bereich abbilden. Entsprechend kann bei geeigneter Skalierung und geeigneter Wahl von  $a_n$  und  $a_{2n}$  die Abbildung  $f_n$  mit einem Ausschnitt der Abbildung  $f_{2n}$  zur Deckung gebracht werden.



Dieses selbstähnliche Verhalten kann quantifiziert werden und führt zu Skalengesetzen in Form von Potenzen und kritischen Exponenten. Die in der Periodenverdopplungskaskade auftretenden Perioden sind  $n = 2^k$ . Die Parameterwerte an den jeweiligen superstabilen Punkten seien  $a_k$ , und die Skalierung ist durch den Abstand  $\Delta_k$  zwischen dem superstabilen Fixpunkt  $x_{2^k}^* = \frac{1}{2}$  und dem nächsten instabilen Fixpunkt der Abbildung  $f_{2^k}$  gegeben (siehe Figur). Man definiert die Größen

$$\varepsilon_k = a_\infty - a_k \quad \alpha_k = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} \quad \text{und} \quad \delta_k = \frac{a_\infty - a_{k-1}}{a_\infty - a_k} \quad (2.22)$$

wobei  $\alpha$  und  $\delta$  im Grenzfalle  $k \rightarrow \infty$  gegen feste Werte konvergiert. Damit wird  $a_\infty - a_k \sim \alpha^{-k}$  und  $\Delta_k \sim \delta^{-k}$ .



$k$	$n$	$a_k$	$\varepsilon$	$\delta_k$	$\alpha_k$
0	1	2	1.5699457		
1	2	3.236067978	0.3338777		
2	4	3.498561699	0.0713839	4.708943	2.654744
3	8	3.554640863	0.0153048	4.680771	2.531838
4	16	3.566667380	0.0032789	4.662960	2.508718
5	32	3.569243531	0.0007021	4.668404	2.504113
6	64	3.569795294	0.0001503	4.668953	2.503161
7	128	3.569913465	0.0000322	4.669157	2.502961
8	256	3.569938774	0.0000069	4.669191	2.502919
9	512	3.569944195	0.0000015	4.669199	2.502910
10	1024	3.569945355	0.0000003	4.669201	2.502908
$\infty$	$\infty$	3.569945672	—	4.669202	2.502908

In der Tabelle sind die entsprechenden Werte aufgelistet.  $\alpha$  und  $\delta$  sind universelle Größen. Die gleichen Werte findet man auch in den Fenstern oder in anderen dynamischen Systemen, die eine Periodenverdoppelungskaskade zeigen. Die  $n$ -fach iterierte Abbildung konvergiert gegen eine Abbildung, die

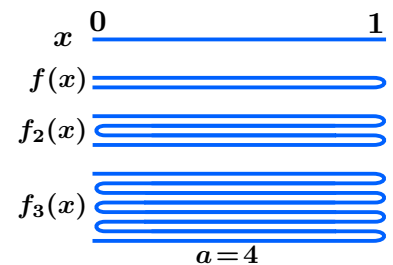
$$f^*(y; \varepsilon) = -\alpha f_2^*\left(-\frac{y}{\alpha}; \frac{\varepsilon}{\delta}\right) \quad (2.23)$$

erfüllt.

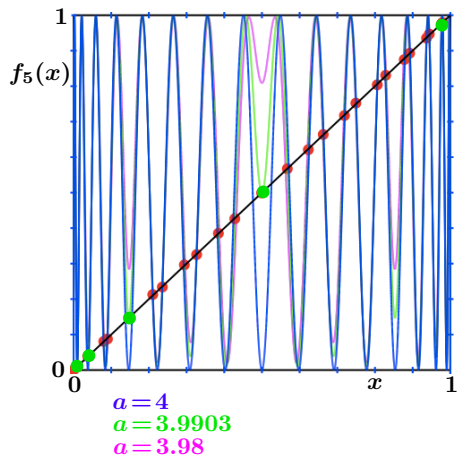
## 2.9 Abschätzung der Zahl der Fenster

Für die Zahl der Fenster lässt sich eine untere Schranke angeben.

Betrachten wir zunächst  $a = 4$ . Durch  $f(x)$  wird der Bereich  $x = 0 \cdots 1$  zweifach auf sich selbst abgebildet, durch  $f_2(x)$  vierfach und allgemein durch  $f_n(x)$   $2^n$ -fach. Damit enthält die Abbildung  $f_n(x)$  für  $a = 4$   $2^n$  instabile Fixpunkte. Falls  $n = p$  eine Primzahl ist, entsprechen diese Fixpunkte den Fixpunkten  $x^* = 0$  und  $f(x^*) = x^* > 0$  der ursprünglichen Abbildung  $f(x)$ , sowie  $(2^p - 2)/p$  instabilen  $p$ -periodischen Orbits.







Für  $a < 4$  wird der Bereich  $x = 0 \cdots 1$  nicht mehr vollständig  $2^p$ -fach auf sich selbst abgebildet, und bei bestimmten Werten von  $a$  verschwinden jeweils zwei  $p$ -periodische Orbits in Form einer Sattel-Knoten Bifurkation. In einem endlichen Bereich oberhalb dieses Wertes findet sich ein stabiler  $p$ -periodischer Orbit, Periodenverdopplung und  $n$ -Band Chaos. Das Fenster ist nach oben durch eine Krise-Bifurkation begrenzt. In diesen Punkten hat die Abbildung eine invariante Dichte, die aus  $p$  kontinuierlichen Stücken besteht.

Dies wiederholt sich bei kleineren  $a$ -Werten, und es existieren insgesamt

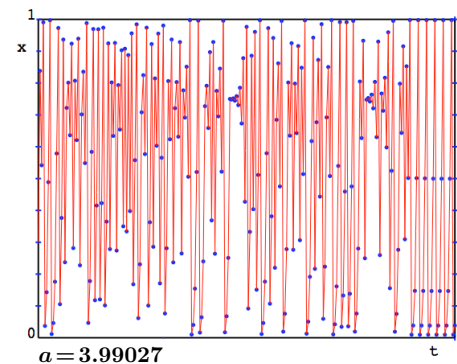
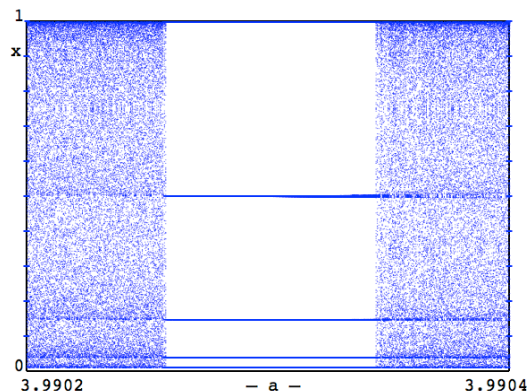
$$Z_p = (2^p - 2)/2p \quad (2.24)$$

Fenster der Periode  $p$ . Mit wachsendem  $p$  nimmt also die Zahl der Fenster rasch zu:  $Z_3 = 1$ ,  $Z_5 = 3$ ,  $Z_7 = 9$ ,  $Z_{11} = 93$ ,  $Z_{13} = 315$ ,  $Z_{17} = 3855$ ,  $Z_{19} = 13797$ . Die Zahl der  $p$ -periodischen Fenster ist damit überabzählbar. Jedes derartige Fenster beansprucht einen, wenn auch kleinen, Wertebereich von  $a$ -Werten.  $p$ -periodischen Fenster können nur für  $a > 3.68$ , dem Wert der letzten Bandverschmelzung, auftreten. Genauere Abschätzungen liefern, dass diese Fenster das Intervall  $3.68 < a < 4$  nicht vollständig ausschöpfen.

Innerhalb jedes Fensters findet sich wieder chaotische Bereiche mit Fenstern. Damit finden sich Fenster mit beliebiger Periode  $n$ . Zerlegt man  $n$  in seine Primfaktoren  $n = p_1 * p_2 * \cdots$ , findet man ein  $n$ -periodische Fenster in einem  $p_1$ -periodischen primären Fenster, dort innerhalb eines  $p_2$ -periodischen Fensters innerhalb der chaotischen  $p_1$ -periodischen Bänder,  $\cdots$ . Damit erhält man eine noch viel größere Zahl von Fenstern. An den oberen Grenzen jedes dieser Fensters findet man Chaos mit stückweise stetiger invarianter Dichte und positivem Lyapunov Exponenten. Diese Punkte, obwohl es überabzählbar viele sind, haben ein verschwindendes Lebesgue-Maß.

Die verbleibenden  $a$ -Werte besitzen keine endlichen Umgebungen. Jeder Wert von  $a$  ist entweder innerhalb eines Fensters, oder es existiert ein Fenster in jeder beliebig kleinen Umgebung. Trotzdem haben diese Werte ein endliches Lebesgue-Maß.

Diese Strukturen sind allerdings in numerischen Simulationen kaum sichtbar, da die Fenster sehr schmal sein können, und da bei Fenstern mit höherer Periode lange Transienten auftreten (siehe Figur). Das Periode 5 Fenster bei  $a = 3.99027$  hat beispielsweise eine Breite von  $10^{-4}$ .



### 3 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

In der Physik, aber auch in vielen anderen Bereichen findet man Gesetzmäßigkeiten für die zeitliche Entwicklung, die durch gekoppelte gewöhnlicher Differentialgleichungen gegeben sind. Die Zustandsvariablen des betrachteten Systems seien  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Sie bilden der  $k$ -dimensionalen Zustandsraum. Sie genügen Bewegungsgleichungen der Form

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = F_i(x_1(t), x_2(t) \dots x_k(t)) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \quad (3.1)$$

wobei  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  stetig differenzierbar sei und nicht explizit von der Zeit abhängen soll. Letzteres ist keine wesentliche Einschränkung, da eine explizite Zeitabhängigkeit oft durch Hinzunahme weiterer Freiheitsgrade berücksichtigt werden kann.

In der Physik hat man es oft mit dissipativen Systemen zu tun, deren Phasenraum kontrahierend ist. Betrachten wir ein infinitesimales Volumen im Phasenraum

$$\delta V = \prod_i \delta x_i \quad (3.2)$$

Dessen zeitliche Änderung ist

$$\frac{d}{dt} \delta V = \sum_i \frac{d}{dt} \delta x_i \prod_{j \neq i} \delta x_j \quad (3.3)$$

Dabei ist

$$\frac{d}{dt} \delta x_i = \frac{d}{dt} (x_i + \delta x_i) - \frac{d}{dt} x_i = F_i(\dots x_i + \delta x_i \dots) - F_i(\dots x_i \dots) = \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} \delta x_i \quad (3.4)$$

und

$$\frac{d}{dt} \delta V = \sum_i \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} \delta V = \mathbf{div} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \delta V \quad (3.5)$$

In dissipativen Systemen (Systemen mit kontrahierendem Phasenraum) ist  $\mathbf{div} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) < 0$  für alle  $\mathbf{x}$ , für konservative Systeme ist  $\mathbf{div} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ .

Der Phasenraum eines mechanischen Systems ist durch die Impulse  $\mathbf{p}$  und Orte  $\mathbf{q}$  aller Teilchen gegeben. Die Hamiltonfunktion sei  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Falls auch Reibung vorhanden ist, sind die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_i} - \sum_j A_{ij} p_j \quad \frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p_i} \quad (3.6)$$

wobei die Reibung durch eine positiv definite Matrix  $\mathbf{A}$  mit Elementen  $A_{ij}$  gegeben ist. Damit wird

$$\mathbf{div} \cdot \mathbf{F} = \sum_i \left[ -\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - A_{ii} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \right] = -\text{Tr} \mathbf{A} < 0 \quad (3.7)$$

Für konservative Systeme ohne Reibung, i.e.  $\mathbf{A} = 0$ , ist  $\frac{d}{dt} \delta V = 0$ . Derartige Systeme werden wir später diskutieren.

### 3.1 Attraktoren in kontrahierenden Systemen

Die Dynamik kann als kontrahierende Strömung im Phasenraum aufgefasst werden, beschrieben als zeitabhängige Abbildung  $\mathcal{T}(t)$  des Phasenraums auf sich selbst, so dass  $\mathbf{x}(t) = \mathcal{T}(t) \mathbf{x}(0)$ . Falls ein Teilvolumen  $V_o$  existiert, so dass  $\mathcal{T}(t) V_o$  ganz in  $V_o$  liegt, also  $\mathcal{T}(t) x \in V_o$  für alle  $x \in V_o$ , dann hat der Teilbereich

$$Y = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{T}(t) V_o \quad (3.8)$$

verschwindendes Volumen. Weder  $V_o$  noch  $Y$  müssen kompakt sein.

Ein Attraktor ist ein Teilbereich  $X$  von  $Y$ , der unter der Dynamik invariant ist, also

$$\mathcal{T}(t) X = X \quad (3.9)$$

und der eine attraktive Umgebung besitzt.

Als Domäne oder Attraktionsbereich eines Attraktors bezeichnet man den Bereich  $B_X$  so dass  $\mathcal{T}(t) x \rightarrow X$  für alle  $x \in B_X$ . Falls mehrere Attraktoren  $X_1, X_2 \dots K_m$  existieren, überlappen sich deren Domänen nicht, fast jeder Anfangspunkt konvergiert aber gegen einen der Attraktoren.

Beispiele für Attraktoren sind Fixpunkte, Grenzzyklen und "seltsame Attraktoren", die wir im Zusammenhang mit chaotischem Verhalten diskutieren werden.

### 3.2 Fixpunkte und Grenzzyklen

Ein Fixpunkt ist ein Punkt  $\mathbf{x}^*$  im Phasenraum so dass  $\mathcal{T}(t) \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*$ . Zur Untersuchung der Stabilität betrachten wir Anfangspunkte  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \delta \mathbf{x}$  und linearisieren die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \delta x_i(t) = \sum_j \left. \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \delta x_j(t) = \sum_j M_{ij} \delta x_j(t) \quad (3.10)$$

wobei die Stabilitätsmatrix  $\mathbf{M}$  im allgemeinen nicht symmetrisch ist. Ihre Eigenwerte  $\lambda$ , definiert durch

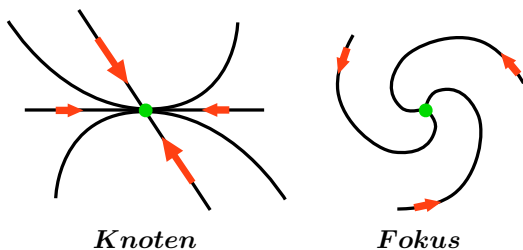
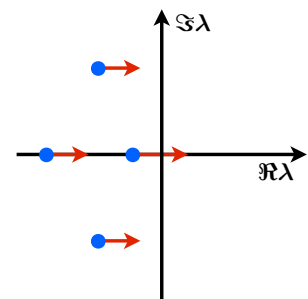
$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_\lambda = \lambda \mathbf{e}_\lambda \quad (3.11)$$

sind reell oder paarweise konjugiert komplex. Entwickelt man  $\delta \mathbf{x}$  nach den Eigenvektoren  $\mathbf{e}_\lambda$

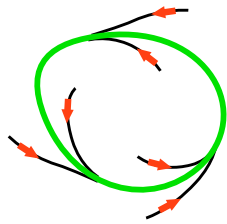
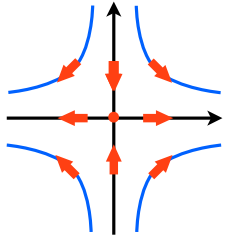
$$\delta \mathbf{x} = \sum_\lambda \delta x_\lambda \mathbf{e}_\lambda \quad (3.12)$$

erhält man

$$\delta \mathbf{x}(t) = \sum_\lambda e^{\lambda t} \delta x_\lambda \mathbf{e}_\lambda \quad (3.13)$$

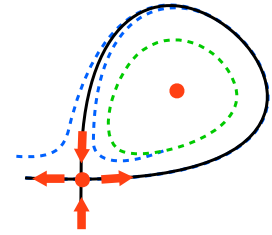


In Fall eines zweidimensionalen Phasenraums sind attraktive Fixpunkte entweder Knoten, falls beide Eigenwerte  $\lambda$  reell  $< 0$  sind, oder vom Typ Fokus, falls die beiden Eigenwerte konjugiert komplex sind und  $\Re \lambda < 0$  ist.

**Grenzzyklus****Sattel-Knoten**

Grenzzyklen, also geschlossene Orbits mit kontrahierender Umgebung sind weitere mögliche Attraktoren. In Systemen mit zweidimensionalen Phasenraum sind Knoten, Fokus und Grenzzyklus die einzigen möglichen Attraktoren.

Daneben gibt es instabile Fixpunkte, z.B. Sattel-Knoten oder instabilen Fokus. Betrachtet man Änderungen von Kontrollparametern, kann ein zunächst stabiler Fokus instabil werden, und zusätzlich taucht ein stabiler Grenzzyklus auf. Dies ist eine Hopf-Bifurkation. Das simultane Auftauchen eines stabilen und eines instabilen Grenzzyklus entspricht der Sattel-Knoten-Bifurkation. Ein weiterer Mechanismus ist das Entstehen eines Grenzzyklus aus einem homoklinen Orbit, wie in der rechten Figur angedeutet.

**Homokliner Orbit**

### 3.3 Lotka-Volterra-Modell

Als Beispiel für ein System mit zweidimensionalen Phasenraum betrachten wir das Lotka-Volterra-Modell. Es beschreibt die Populationen von Räubern  $R$  und Beutetieren  $B$ .

$$\frac{d}{dt}B = aB - bRB + G(B) \quad \frac{d}{dt}R = cBR - dR + H(R) \quad (3.14)$$

Dabei ist  $a$  die Reproduktionsrate der Beute, und  $b$  ist die Rate, mit der ein Räuber ein Beutetier erlegt. Die Reproduktionsrate der Räuber ist proportional zum Nahrungsangebot, mit Koeffizient  $c$ , und  $d$  ist die Sterberate der Räuber. Zusätzliche Effekte, beispielsweise beschränkte Ressourcen für die Beutetiere, können in den Funktionen  $G(B)$  und  $H(R)$  berücksichtigt werden.

Alternativ beschreibt das Lotka-Volterra-Modell das Zusammenspiel von Preis  $P$  und Angebot  $Q$  einer Ware. Es seien  $\bar{P}$  und  $\bar{Q}$  Mittelwerte von Preis und Angebot. Liegt der Preis über dem Mittelwert, wird die Produktion der Ware gesteigert, andererseits dämpft ein Überangebot den Preis.

$$\frac{d}{dt}P = \frac{1}{\tau_P} \frac{\bar{Q} - Q}{\bar{Q}} P + G(P) \quad \frac{d}{dt}Q = \frac{1}{\tau_Q} \frac{P - \bar{P}}{\bar{P}} Q + H(Q) \quad (3.15)$$

$\tau_P$  und  $\tau_Q$  sind Zeitkonstanten für die Anpassung von Preis und Produktion. Auch hier können zusätzliche Effekte durch  $G(P)$  und  $H(Q)$  berücksichtigt werden.

Durch Wahl geeigneter Variablen, z.B.  $x = P/\bar{P}$  und  $y = Q/\bar{Q}$ , erhält man die Gleichungen

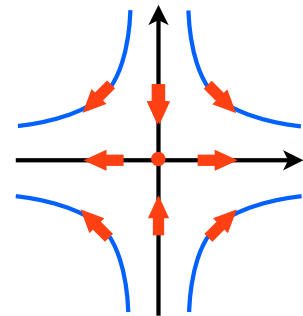
$$\frac{d}{dt}x = (1 - y)x + g(x) \quad \frac{d}{dt}y = (x - 1)y + h(y) \quad (3.16)$$

Betrachten wir zunächst die ursprünglichen Gleichungen mit  $g(x) = 0$  und  $h(x) = 0$ .

Hier hat man einen Fixpunkt  $x_o^* = 0$  und  $y_o^* = 0$ . Die zugehörige Stabilitätsmatrix ist

$$\underline{\mathbf{M}}_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

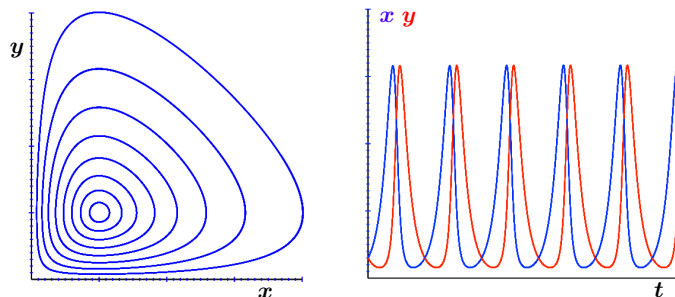
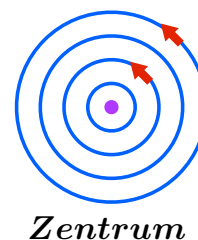
mit Eigenwerten  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -1$ . Damit ist dieser Fixpunkt ein Sattelnknoten.

**Sattel-Knoten**

Ein weiterer Fixpunkt ist  $x^* = 1$  und  $y^* = 1$  mit einer Stabilitätsmatrix

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind  $\lambda_{\pm} = \pm i$  und damit ist dieser Fixpunkt ein Zentrum.



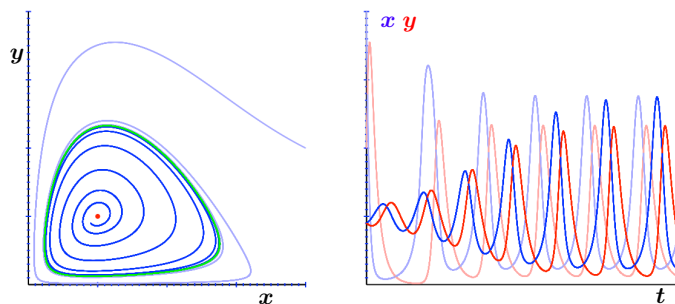
Die Figur zeigt Lösungen von (3.16) für  $g = h = 0$  mit verschiedenen Anfangswerten. Die Tatsache, dass hier geschlossene Orbits dicht liegen, ist nicht typisch. Die Größe  $C = x - \ln(x) + y - \ln(y)$  ist eine Erhaltungsgröße, i.e.  $C$  ist auf jedem Orbit konstant. Eine kleine Störung der Gleichungen genügt um diese Entartung auf zu heben.

Betrachten wir als Beispiel einer Störung

$$g(x) = ax(x-1)(2-x) \quad h(y) = by(1-y), \quad (3.19)$$

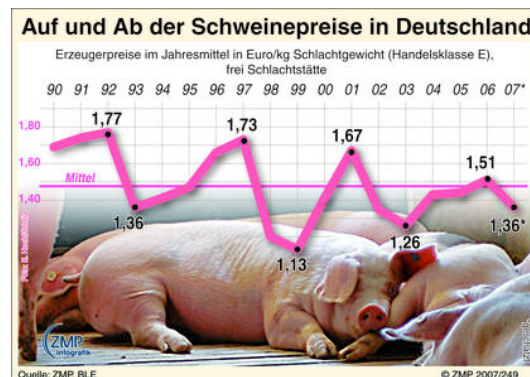
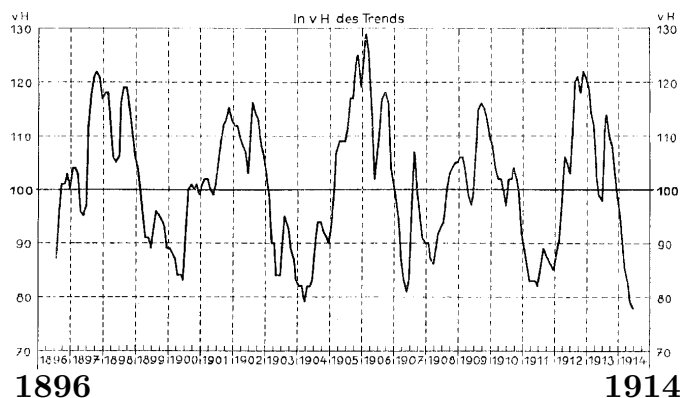
ist  $x^* = 1$  und  $y^* = 1$  immer noch Fixpunkt, mit Stabilitätsmatrix

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -b \end{pmatrix} \quad \text{und Eigenwerten} \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(a-b) \pm i\sqrt{1 - \frac{1}{4}(a+b)^2} \quad (3.20)$$



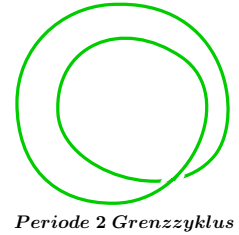
Für  $a < b$  ist dieser Fixpunkt ein (anziehender) Fokus, für  $a > b$  ein abstoßender Fokus. In diesem Fall existiert als Attraktor ein geschlossener Orbit, ein sogenannter Grenzzyklus. Die nebenstehende Figur zeigt Lösungen mit  $a = 0.3$  und  $b = 0.1$  und unterschiedlichen Anfangswerten.

Das Phänomen periodisch schwankender Marktpreise und Angebote wurde zunächst anhand von Schweinepreisen in den USA beobachtet. Der Begriff Schweinezyklus wird heute allgemein auf periodische Schwankungen von Angebot und Nachfrage in allen möglichen Märkten angewandt.



### 3.4 Dreidimensionaler Phasenraum, Rössler-Attraktor

In Systemen mit kontinuierlicher Dynamik und zweidimensionalem Phasenraum sind als Attraktoren nur Fixpunkte und Grenzzyklen möglich. Die wesentliche Einschränkung in zweidimensionalen Systemen besteht darin, dass sich Trajektorien nicht kreuzen können. Ein Periode 2 Grenzzyklus, wie hier gezeigt, ist in einem zweidimensionalen System nicht möglich. In drei oder mehr Dimensionen kann ein Kreuzen der Trajektorien durch Ausweichen in die dritte Dimension verhindert werden. In Systemen mit drei- oder mehrdimensionalem Phasenraum können damit kompliziertere Attraktoren auftreten, z.B. seltsamer Attraktoren, die chaotisches Verhalten zeigen.



Ein vergleichsweise einfaches dreidimensionales Modellsystem wurde von O. Rössler angegeben. Es ist durch zwei lineare und eine nichtlineare Differentialgleichung gegeben

$$\frac{dx}{dt} = y - z \quad \frac{dy}{dt} = -x + ay \quad \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \quad (3.21)$$

wobei  $a$ ,  $b$  und  $c$  Kontrollparameter des Modells sind.

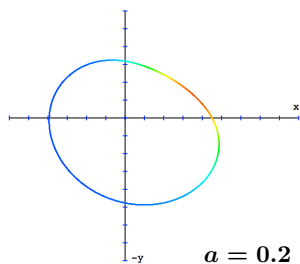
Betrachten wir zunächst  $b = 0$ . Für Anfangswerte mit  $z = 0$  bleibt die Bewegung auf die  $x$ - $y$  Ebene beschränkt und man findet die Lösung

$$x = (1 + \gamma t) e^{\lambda t} \quad \lambda = \frac{1}{2}a \pm i \sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2} \quad \gamma = \pm i \sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2} \quad (3.22)$$

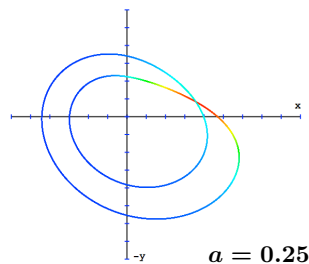
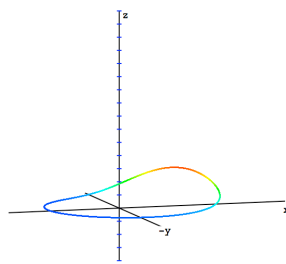
Für  $a < 0$  ist damit  $x^* = y^* = 0$  ein attraktiver Fokus, für  $a > 0$  wird dieser Fokus instabil und die Trajektorien sind auswärts gerichtete Spiralen in der  $x$ - $y$ -Ebene.

Für  $b > 0$  überlagert sich dieser Spiralbewegung eine Bewegung in  $z$ -Richtung, die für  $x > c$  die Trajektorie "anhebt". Dies bewirkt aber, dass  $x$  wieder kleiner wird und damit auch  $z$  wieder abnimmt. Die Trajektorie wird also "zurückgefaltet". Der rotierenden Bewegung in der  $x$ - $y$ -Ebene überlagert sich ein Prozess der Dehnung und Zurückfaltung, wie bei der logistischen Abbildung. Damit sollte auch der Rössler-Attraktor Grenzzyklen aufweisen, die sich erst nach mehreren Umläufen Schließen, und auch chaotisches Verhalten aufweisen.

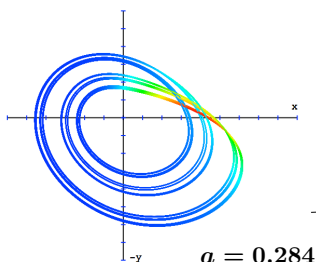
Die folgenden Beispiele mit verschiedenen Werten von  $a$  sind mit  $b = 1$  und  $c = 4$  gerechnet.



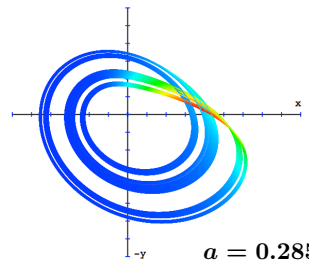
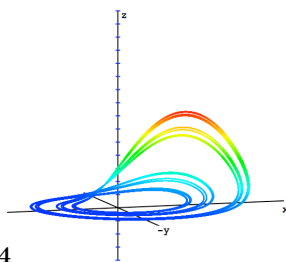
Grenzzyklus



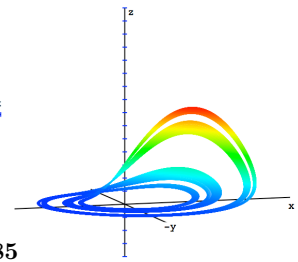
Periode 2 Grenzzyklus



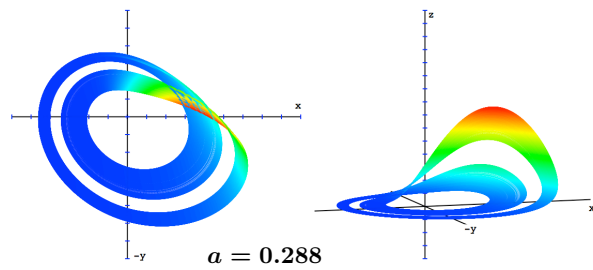
Periode 16 Grenzzyklus



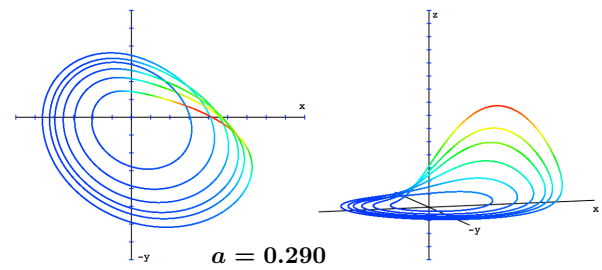
4 Band Chaos



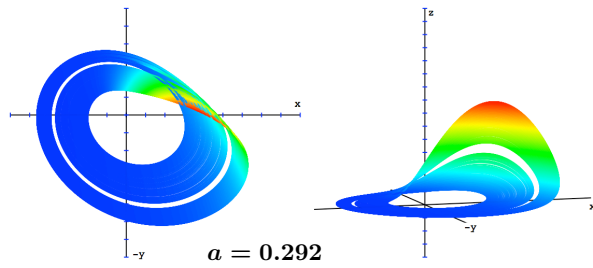




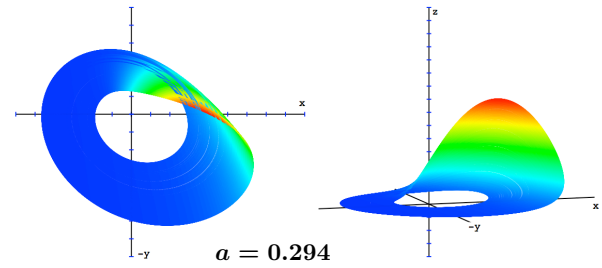
2 Band Chaos



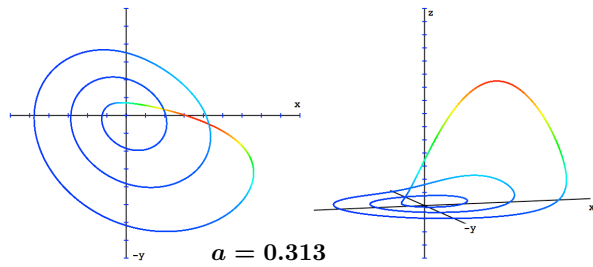
Periode 6 Grenzzyklus



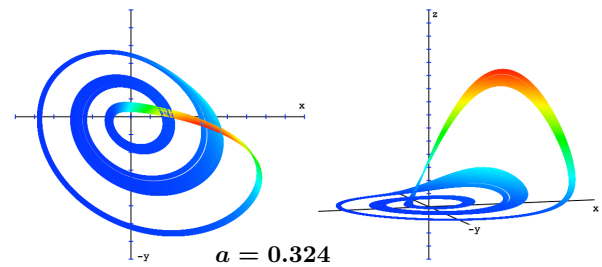
2 Band Chaos



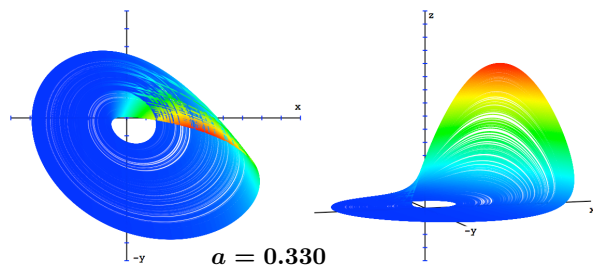
1 Band Chaos



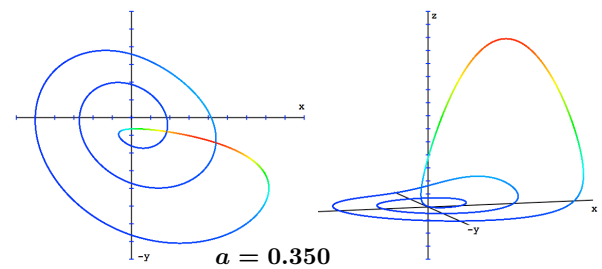
Periode 3 Grenzzyklus



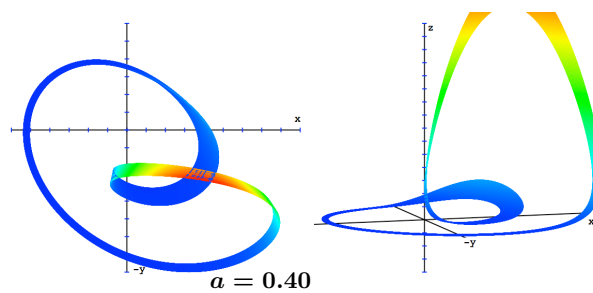
3 Band Chaos



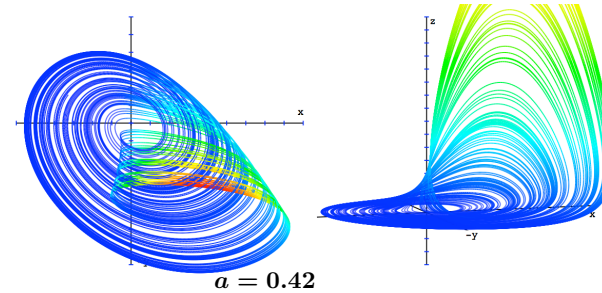
1 Band Chaos



Periode 6 Grenzzyklus

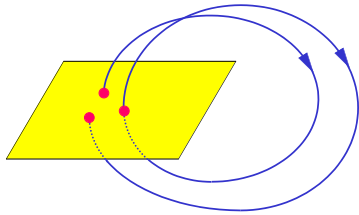
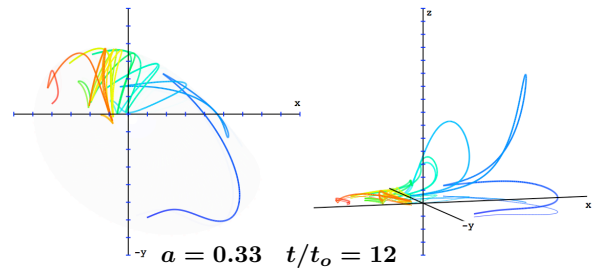


2 Band Chaos



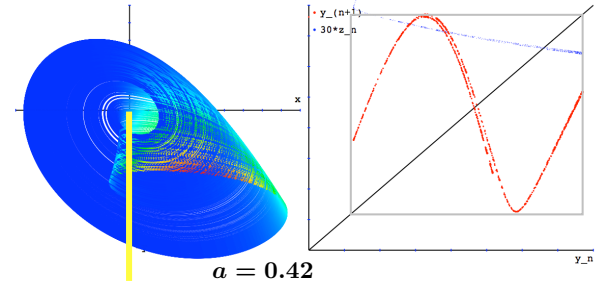
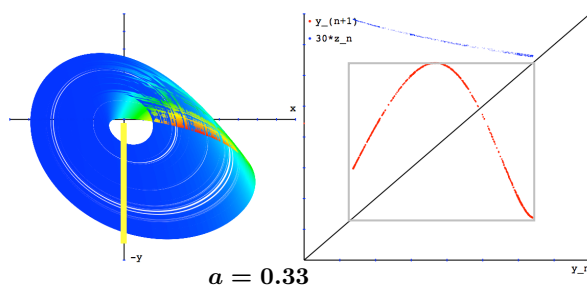
1 Band Chaos

In der nebenstehenden Figur wurden Anfangspunkte auf einer Geraden ( $x = -7.0$ ,  $y = z = 0$ ) gewählt. Die Figur zeigt diese Punkte zur Zeit  $t = 36$ , was etwa 12 Umläufen entspricht.



Schneidet man den Phasenraum durch eine Ebene (Hyperebene), bilden aufeinanderfolgende Durchstoßpunkte eine Abbildung, die sogenannte Poincaré Abbildung.

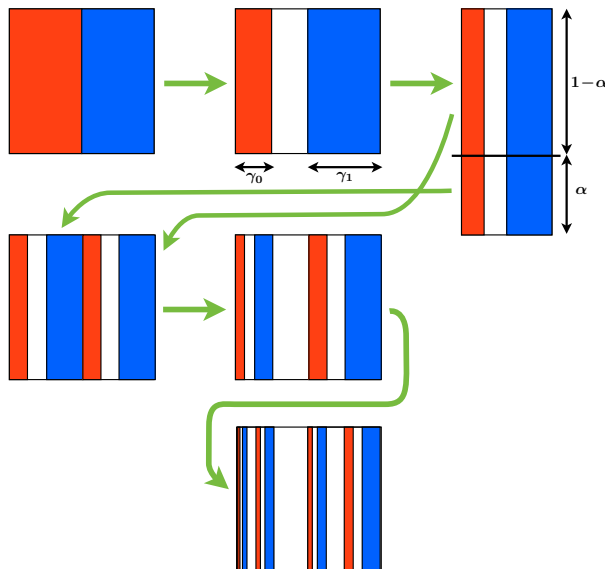
Für den Rössler-Attraktor wählen wir die Halbebene  $x = 0$ ,  $y < 0$ .



Gezeigt ist  $y_{n+1}$  und  $z_{n+1}$  als Funktion von  $y_n$ . Die Werte von  $y_{n+1}$  liegen mit nur geringfügigen Abweichungen auf einer Kurve  $f(y)$ , die der logistischen Abbildung ähnelt. Auch bei den Werte von  $z_{n+1}$ , die 30-fach überhöht sind, sind nur minimale Abweichungen von einer Linie zu beobachten.

### 3.5 Bäcker Abbildung

Bei genauerer Auflösung würde man eine blättrige Feinstruktur erkennen. Diese kann man anhand eines einfachen Modells, der sogenannten Bäcker-Transformation, verstehen.



Die hier gezeigte Version entspricht einem kontrahierendem System. Zunächst wird die linke und rechte Hälfte in  $x$ -Richtung mit einem Faktor  $\gamma_0$  b.z.w.  $\gamma_1$  kontrahiert. Danach wird in  $y$ -Richtung gedehnt und im Verhältnis  $(1 - \alpha)/\alpha$  geschnitten. Der untere Teil wird links an den oberen Teil angesetzt und so verzerrt, dass das ursprüngliche Quadrat ausgefüllt wird. Dieser Vorgang wird iteriert und führt zu einer blättrigen Struktur, die in  $x$ -Richtung einer Cantor Menge entspricht.

Der Trajektorie eines Punktes kann eine Binärzahl zugeordnet werden. Wenn der Punkt beim Schneiden im oberen Teil liegt, wird eine 1 notiert, wenn er im unteren Teil liegt, wird eine 0 geschrieben. Entsprechend liegt er nach der Teilung und dem Zusammenkleben in der linken b.z.w. rechten Hälfte.



Betrachtet man  $n$  Iterationen, wird jedem Anfangswert eine  $n$ -stellige Binärzahl zugeordnet. Damit ist auch jeder Streifen in der  $n$ -fach iterierten Abbildung durch eine  $n$ -stellige Binärzahl charakterisiert. Falls eine Binärzahl  $n_0$ -mal eine 0 und  $n_1$ -mal eine 1 enthält, ist die gesamte Breite der zugehörigen Streifen  $\gamma_0^{n_0} \gamma_1^{n_1}$  und die Gesamte Länge  $\alpha^{n_0} \gamma_0^{-n_0} (1 - \alpha)^{n_1} \gamma_1^{-n_1}$ .

Zur Berechnung der Lyapunov-Exponenten muss man die Dehnung in  $y$ -Richtung und Stauchung in  $x$ -Richtung über alle Trajektorien, b.z.w. alle Binärzahlen mitteln. Die höchste Wahrscheinlichkeit haben Binärzahlen mit  $n_0 = n_1 = n/2$ . Nimmt man diesen Wert erhält man

$$\lambda_1 = -\alpha \ln \alpha - (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) \geq 0 \quad \lambda_2 = \alpha \ln \gamma_0 + (1 - \alpha) \ln \gamma_1 \leq 0 \quad (3.23)$$

Die Bäcker Transformation zeigt also empfindliche Abhängigkeit von Anfangswerten und damit chaotisches Verhalten.

### 3.6 Fraktale Dimension

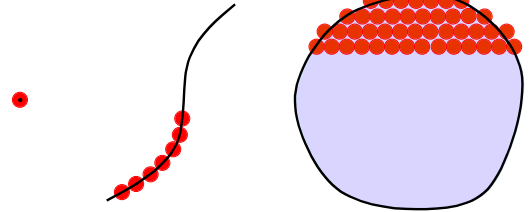
Zur Bestimmung der Dimension eines geometrischen Objekts kann man sich fragen, wie viele Kugeln mit Durchmesser  $\varepsilon$  sind notwendig um das Objekt vollständig zu bedecken. Für einen Punkt ist  $N(\varepsilon) = 1 = \varepsilon^0$ , für eine Linie der Länge  $L$  ist  $N(\varepsilon) = L \varepsilon^{-1}$  und für eine Fläche  $F$  ist  $N(\varepsilon) = F \varepsilon^{-2}$ . Die sogenannte Hausdorff- oder fraktale Dimension ist definiert als

$$d_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon} \quad N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d_f} \quad (3.24)$$

Damit kann man dem Attraktor der Bäcker-Transformation eine fraktale Dimension zuordnen. Nach  $n$  Schritten ist die typische Breite der Streifen  $\sim e^{\lambda_2 n}$ , deren Gesamtlänge  $\sim e^{\lambda_1 n}$ . Benutzt man Kugeln der Größe  $\varepsilon \sim$  Breite der Streifen, erhält man

$$\text{Breite} \sim e^{\lambda_2 n} = \varepsilon \quad \text{Länge} \sim e^{\lambda_1 n} = \varepsilon N(\varepsilon) \quad d_f = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (3.25)$$

Für  $\alpha = 1/2$ ,  $\gamma_0 = 1/4$  und  $\gamma_1 = 1/2$  erhält man beispielsweise  $d_f = 5/3$ , also einen Wert  $> 1$  und  $< 2$ .



## 4 Konservative Systeme

### 4.1 Hamiltonsche Mechanik

Es existiert eine Hamiltonfunktion  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  mit  $\mathbf{p} = \{p_1 \cdots p_k\}$  und  $\mathbf{q} = \{q_1 \cdots q_k\}$ . Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_i} \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p_i} \quad (4.1)$$

Die Stabilitätsmatrix ist

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{p}} & -\frac{\partial^2 H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial^2 H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{p}} & \frac{\partial^2 H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

und  $\text{Tr } \underline{\mathbf{M}} = 0$ . Dies ist der Liouville-Satz, der besagt, dass die Dichte im Phasenraum erhalten ist.

Zur Vereinfachung der Notation führen wir Poisson Klammern ein

$$\{A(\mathbf{p}, \mathbf{q}), B(\mathbf{p}, \mathbf{q})\} = \sum_{\ell} \left\{ \frac{\partial A(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_{\ell}} \frac{\partial B(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p_{\ell}} - \frac{\partial B(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_{\ell}} \frac{\partial A(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p_{\ell}} \right\} \quad (4.3)$$

Damit werden die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \{p_i, H\} \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} = \{q_i, H\} \quad (4.4)$$

und

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (4.5)$$

Unter einer kanonischen Transformation versteht man die Einführung neuer verallgemeinerter Orts- und Impulsvariablen  $P_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  und  $Q_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  so daß

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 \quad \{P_i, P_j\} = 0 \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad (4.6)$$

und einer neuen Hamilton Funktion  $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  so dass

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \{P_i, K\} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial t} = \{Q_i, K\} = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad (4.7)$$

### 4.2 Integriable Systeme

Erhaltungsgrößen sind Funktionen  $F_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , die Konstanten der Bewegung sind, also

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} = \{F_i, H\} = 0 \quad (4.8)$$

Falls mehrere Erhaltungsgrößen vorhanden sind sei  $\{F_i, F_j\} = 0$ .

Man kann kanonische Transformationen finden, so dass die neuen Impulse Erhaltungsgrößen sind, also  $P_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = F_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Falls die Zahl der Erhaltungsgrößen gleich  $k$  ist, sind alle neuen Impulse Erhaltungsgrößen, und ihr Wert ist durch die Anfangsbedingungen bestimmt  $P_i(t) = f_i = F_i(t=0)$ .

Ein derartiges System ist integrabel.

Da Funktionen von Erhaltungsgrößen auch Erhaltungsgrößen sind, kann man es in einem integrablen System erreichen, dass  $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = K(\mathbf{P})$  ist, also nur von den generalisierten Impulsen  $\mathbf{P}$  abhängt. Die Bewegungsgleichung für die neuen Ortsvariablen ist dann

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} = \frac{\partial K(\mathbf{P})}{\partial P_i} \quad (4.9)$$

Berücksichtigt man, dass die Werte der Impulse  $P_i = f_i$  durch die Anfangsbedingungen gegeben sind, ist

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} = \frac{\partial K(\mathbf{f})}{\partial f_i} = \omega_i(\mathbf{f}) \quad Q_i(t) = \omega_i(\mathbf{f}) t + \theta_i \quad (4.10)$$

Falls das System in den ursprüngliche Variablen beschränkt bleibt, müssen die Trajektorien quasiperiodische Funktionen der neuen Ortskoordinaten  $\mathbf{Q}$  sein. Die Perioden sind durch die Frequenzen  $\omega_i(\mathbf{f})$  gegeben, und die Bewegung findet auf einem Torus im  $k$ -dimensionalen Raum statt. Die Ortskoordinaten  $\mathbf{Q}$  bezeichnet man dann als Winkelvariable.

### 4.3 Periodisch angestoßener Rotator, Standard-Abbildung

In einem System mit einem Freiheitsgrad  $k = 1$  hat dieses die Form eines freien Rotators, beschrieben durch einen Winkel  $\varphi(t)$  und einen Impuls  $\psi(t)$ , gebracht werden. Die Lösung ist dann

$$\psi(t) = \psi(0) \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \psi(0) t \quad (4.11)$$

Das System werde durch eine periodisch wirkende Kraft  $f(t) = a \cos(\varphi(t)) \delta(t \bmod \tau)$  gestört, und damit ist

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = f(t) = a \cos(\varphi(t)) \delta(t \bmod \tau) \quad (4.12)$$

Eine Poincaré Abbildung, die die Koordinaten in Zeitschritten  $\tau$  aufeinander abbildet, liefert

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \psi_n \tau \quad \psi_{n+1} = \psi_n + a \cos(\varphi_n + \psi_n \tau) \quad (4.13)$$

Diese Gleichungen sind als Standard-Abbildung bekannt.

Die zugehörige Stabilitätsmatrix ist

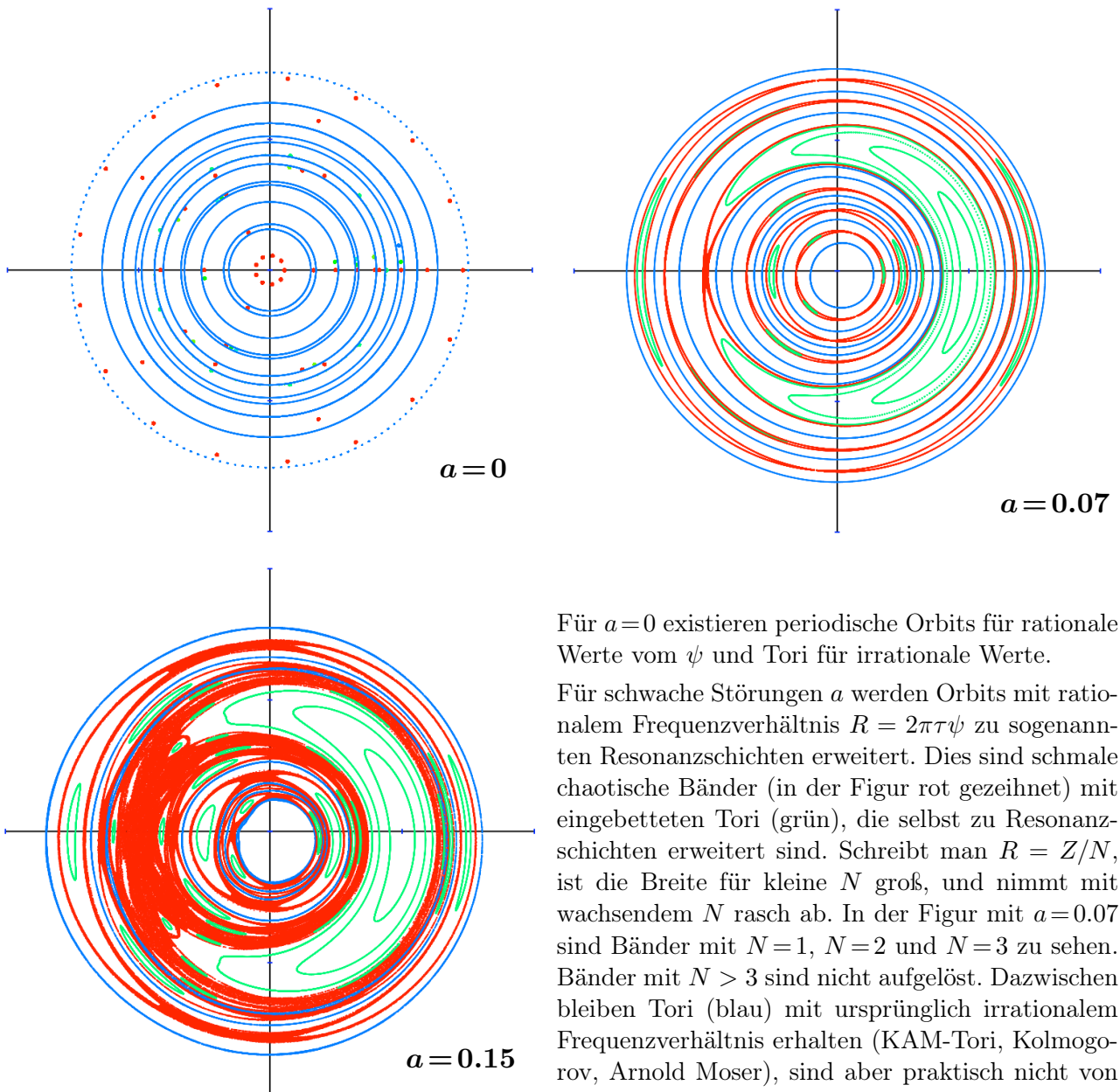
$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a \sin(\varphi + \psi \tau) & 1 - a \sin(\varphi + \psi \tau) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

und wegen  $\det \underline{\mathbf{M}} = 1$  ist auch die Abbildung volumenerhaltend.

In der Figur sind die Resultate von Iterationen in Polardarstellung

$$x_n = \psi_n \cos(\varphi_n) \quad y_n = \psi_n \sin(\varphi_n) \quad (4.15)$$

gezeigt.



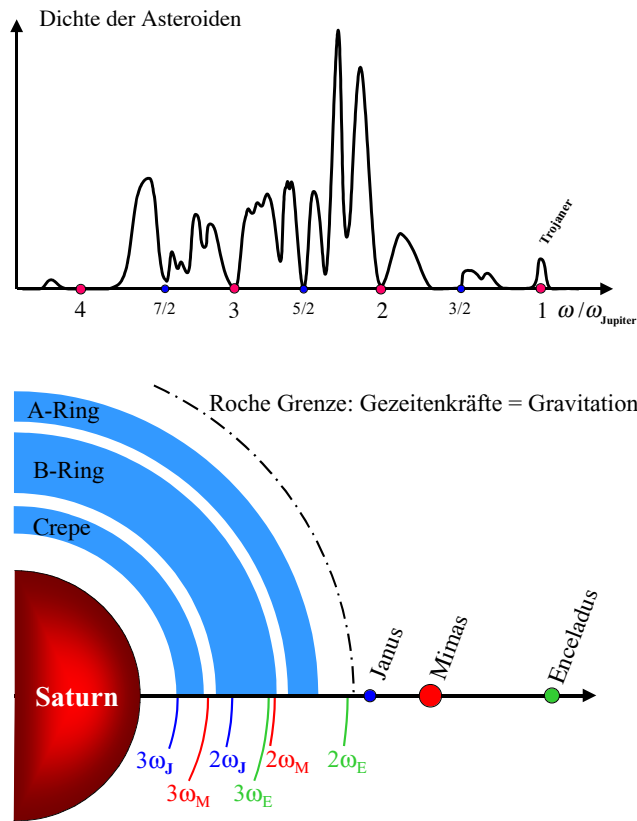
Für  $a=0$  existieren periodische Orbits für rationale Werte vom  $\psi$  und Tori für irrationale Werte.

Für schwache Störungen  $a$  werden Orbits mit rationalem Frequenzverhältnis  $R = 2\pi\tau\psi$  zu sogenannten Resonanzschichten erweitert. Dies sind schmale chaotische Bänder (in der Figur rot gezeichnet) mit eingebetteten Tori (grün), die selbst zu Resonanzschichten erweitert sind. Schreibt man  $R = Z/N$ , ist die Breite für kleine  $N$  groß, und nimmt mit wachsendem  $N$  rasch ab. In der Figur mit  $a=0.07$  sind Bänder mit  $N=1$ ,  $N=2$  und  $N=3$  zu sehen. Bänder mit  $N > 3$  sind nicht aufgelöst. Dazwischen bleiben Tori (blau) mit ursprünglich irrationalem Frequenzverhältnis erhalten (KAM-Tori, Kolmogorov, Arnold Moser), sind aber praktisch nicht von Resonanzbändern mit großem  $N$  zu unterscheiden.

Bei größeren Störungen, wie in der Figur mit  $a = 0.15$  gezeigt, werden die Bänder breiter und verschmelzen. Zum Beispiel sind die bei  $a=0.07$  getrennten Bänder mit  $N=3$ ,  $N=1$  und  $N=3$  zu einem chaotischen Bereich geworden, während die angrenzenden Bänder mit  $N=2$  durch KAM-Tori und Resonanzschichten hoher Ordnung getrennt sind. Die bei  $a=0.07$  noch vorhandenen Resonanzschichten zwischen dem  $N=1$  und den benachbarten  $N=3$  Resonanzschichten bei  $a=0.15$  sind bei  $a=0.15$  aufgelöst.

Es zeigt sich also, dass sich eine periodische Störungen mit Frequenz  $\omega_s$  besonders stark auf Trajektorien auswirkt, deren ungestörte Frequenz  $\omega$  in Resonanz ist, also wenn  $\omega/\omega_s = Z/N$  eine rationale Zahl mit kleinen  $Z$  und  $N$  ist.

#### 4.4 Asteroiden, Ringsysteme



Im Planetensystem hat Jupiter den größten Einfluss auf die Bahnen anderer Planeten. Dies ist beispielsweise an der Verteilung von Asteroiden, die sich zwischen Mars und Jupiter befinden, sichtbar. Auf Bahnen, die mit dem Umlauf des Jupiters in Resonanz sind, sind weit weniger Asteroiden als in nicht resonanten Bereichen zu finden. Ausnahme sind die Trojaner, die sich in der Nähe von Lagrange-Punkten L4 und L5 auf stabilen Bahnen um diese bewegen.

Insgesamt ist das Sonnensystem sehr stabil. Seit seinem Bestehen hat Jupiter etwa  $4 \cdot 10^8$  Umläufe gemacht.

Resonanzen spielen auch in den Ringsystemen der großen Planeten eine Rolle. Ausgeprägte Lücken in den Saturnringen sind durch Resonanzen mit Saturnmonden, vorwiegend Mimas, bedingt.

Die Vermeidung von Resonanzen zwischen Umlauffrequenz und Schwingungen um die Sollbahn ist bei Speicherringen, beispielsweise dem LHC am CERN, entscheidend. Hier ist die Zahl der geforderten Umläufe eines Teilchens etwa  $4 \cdot 10^9$ .

### 5 Literatur

P. Cvitanović, R. Artuso, P. Dahlqvist, R. Mainieri, G. Tanner, G. Vattay: *Chaos: classical and quantum* <http://ChaosBook.org/>

H. Strogatz: *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Books Publishing (1994)

H. G. Schuster: *Deterministic Chaos*, VCH Weinheim (1995)

P. Collet, J.P. Eckmann: *Iterated Maps on the Interval as Dynamical System*, Birkhäuser (1980 / 2009)