Turbulenz

Heinz Horner
Institut für Theoretische Physik der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Philosophenweg 19 69120 Heidelberg
Januar 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Euler und Lagrange Beschreibung eines Kontinuums 2
1.1 Euler Beschreibung, ortsfeste Koordinaten . . . 2
1.2 Lagrange Beschreibung, mitbewegtes Koordinatensystem . . . 2

2 Navier Stokes Gleichung 3
2.1 Inkompressible Strömungen . . . 4
2.2 Euler Gleichung . . . 4
2.3 Reynolds'sches Ähnlichkeitsgesetz . . . 4

3 Wirbelsätze in inkompressiblen Strömungen 5
3.1 Zirkulation, Thomson'scher Wirbelsatz . . . 5
3.2 Stromlinien, Teilchentrajektorien, Wirbellinien . . . 6
3.3 Helmholtz'sche Wirbelsätze . . . 6
3.4 Ebene Strömungen . . . 7

4 Voll ausgebildete Turbulenz: Grundlagen und Skalenverhalten 7
4.1 Energiesatz . . . 7
4.2 Energiespektrum . . . 8
4.3 Energiekaskade . . . 9
4.4 Naive Skalenanalyse, Kolmogorov 41 Skalierung . . . 10

5 Reynolds Gleichungen, Wirbelviskosität 11
5.1 Großräumige Strömung . . . 11
5.2 Kleinräumige Strömung und Wirbelviskosität . . . 12
5.3 Wirbeldehnung . . . 13

6 Intermittenz, Kolmogorov-Obukhov 1962 14
6.1 Experimente . . . 14
6.2 Differentielle Geschwindigkeitsfluktuationen . . . 14
6.3 Kolmogorov 4/5-Gesetz . . . 15
6.4 Intermittenz . . . 17

7 Feldtheoretische Ansätze 19
7.1 Klassische Nichtgleichgewichtsdynamik . . . 19
7.2 "Direct Interaction Approximation" (DIA, Kraichnan 1961) . . . 21
7.3 Skalenverhalten und Infrarot Divergenzen in der DIA . . . 23
7.4 Advektion, stochastische Galilei-Transformation . . . 24
7.5 Lagrange'sche Theorien . . . 25

8 Zweidimensionale Turbulenz 27
8.1 Erhaltungsgrößen . . . 27
8.2 Enstrophie- und Energiekaskade . . . 28

9 Literatur 30

1 Euler und Lagrange Beschreibung eines Kontinuums

1.1 Euler Beschreibung, ortsfeste Koordinaten

Eine Kontinuumsbeschreibung eignet sich für Situationen, in denen die Längenskala für räumliche Änderungen groß gegenüber dem mittleren Abstand der Teilchen oder deren freier Weglänge ist. Die Dichte lässt sich dann schreiben als

$$\rho(\vec{x},t) = m\sum_i \tilde{\delta}\big(\vec{x}-\vec{x}_i(t)\big) \tag{1.1}$$

wobei $\tilde{\delta}(\vec{x})$ eine ausgeschmierte δ-Funktion ist.

Für die zeitliche Änderung der Dichte erhält man die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho(\vec{x},t) = -\sum_i \Big(\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{x}}_i(t)\Big)\tilde{\delta}\big(\vec{x}-\vec{x}_i(t)\big) = -\Big(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{x},t)\Big) = -\Big(\vec{\nabla}\cdot\big(\rho(\vec{x},t)\vec{u}(\vec{x},t)\big)\Big) \tag{1.2}$$

wobei der Strom $\vec{j}$ und Geschwindigkeit $\vec{u}$ gegeben sind durch

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \rho(\vec{x},t)\vec{u}(\vec{x},t) = m\sum_i \dot{\vec{x}}_i(t)\tilde{\delta}\big(\vec{x}-\vec{x}_i(t)\big) \tag{1.3}$$

Die Beschreibung mit ortsfestem Koordinatensystem wird "Euler Beschreibung" genannt, obwohl sie von d'Alembert eingeführt wurde.

Die Kontinuitätsgleichung (1.2) lässt sich auch in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(\vec{x},t) = \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \big(\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\Big)\rho(\vec{x},t) = -\rho(\vec{x},t)\Big(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}(\vec{x},t)\Big) \tag{1.4}$$

schreiben. Die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\cdots = \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \big(\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\Big)\cdots \tag{1.5}$$

wird als materielle, mitschwimmende, totale oder Lagrange'sche Zeitableitung bezeichnet.

1.2 Lagrange Beschreibung, mitbewegtes Koordinatensystem

Eine zweite Beschreibung ist die "Lagrange Beschreibung", die tatsächlich von Euler eingeführt wurde. Hier sind die Teilchen durch ihre Koordinaten $\vec{x}_o$ zu einer festen Zeit t_o gekennzeichnet.Ihre Position zu einer anderen Zeit t ist

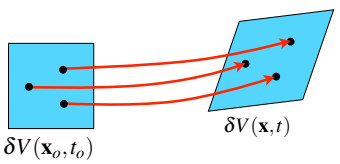
$$\vec{x}_i \longrightarrow \vec{x}(\vec{x}_o,t) \qquad \text{mit} \quad \vec{x}(\vec{x}_o,t_o) = \vec{x}_o \tag{1.6}$$

Entsprechend ist die Geschwindigkeit in der Lagrange Beschreibung definiert

$$\vec{v}(\vec{x}_o,t) = \vec{u}\big(\vec{x}(\vec{x}_o,t),t\big) \tag{1.7}$$

Betrachten wir ein Volumelement $\delta V(\vec{x}_o,t_o)$. Die Zahl der Teilchen in diesem Volumelement ist $\delta N(\vec{x}_o,t_o) = \rho(\vec{x}_o,t_o)\delta V(\vec{x}_o,t_o)$. Zur Zeit t befinden sich diese Teilchen in einem Volumelement $\delta V(\vec{x},t)$. Aus der Kontinuitätsgleichung (1.2) erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta V(\vec{x},t) = \delta V(\vec{x},t)\Big(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}(\vec{x},t)\Big) \tag{1.8}$$



2 Navier Stokes Gleichung

Lagrange Gleichung für Teilchen mit Reibung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\vec{x}}_i}\right)-\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\vec{x}_i}+\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\dot{\vec{x}}_i}=\vec{f}_i \tag{2.1}$$

Lagrange- und Dissipations-Funktion

$$\mathcal{L}=\tfrac{1}{2}m\sum_i\big(\dot{\vec{x}}_i\big)^2-\Phi(\{\vec{x}\})\qquad\qquad \mathcal{F}=\tfrac{1}{2}\sum_{ij}\Big(\dot{\vec{x}}_i\cdot\underline{\underline{K}}_{ij}\cdot\dot{\vec{x}}_j\Big) \tag{2.2}$$

Zustandsgleichung für potentielle Energie, mit (1.1),

$$\Phi(\{\vec{x}\})=\int\mathrm{d}\vec{x}\;\varphi\big(\rho(\vec{x})\big)=\int\mathrm{d}\vec{x}\;\varphi\big(m\sum_i\tilde{\delta}(\vec{x}-\vec{x}_i)\big) \tag{2.3}$$

Damit wird

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\vec{x}_i}=m\int\mathrm{d}\vec{y}\,\frac{\mathrm{d}\varphi\big(\rho(\vec{y})\big)}{\mathrm{d}\rho(\vec{y})}\,\vec{\nabla}_{\vec{x}_i}\,\tilde{\delta}(\vec{y}-\vec{x}_i)=m\int\mathrm{d}\vec{y}\;\tilde{\delta}(\vec{y}-\vec{x}_i)\,\vec{\nabla}_{\vec{y}}\Big(\frac{\mathrm{d}\varphi\big(\rho(\vec{y})\big)}{\mathrm{d}\rho(\vec{y})}\Big) \tag{2.4}$$

Multipliziert man (2.1) mit $\tilde{\delta}(\vec{x}-\vec{x}_i)$ und summiert über i, erhält man die Kontinuumsversion der Lagrange Gleichung

$$\rho(\vec{x},t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}(\vec{x},t)+\vec{\nabla}P(\vec{x},t)+\frac{\delta\mathcal{F}(t)}{\delta\vec{u}(\vec{x},t)}=\vec{f}(\vec{x},t) \tag{2.5}$$

Dabei ist der Druck $P=P(\rho)$ gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}=-\rho\frac{\mathrm{d}\varphi(\rho)}{\mathrm{d}\rho} \tag{2.6}$$

Die Dissipationsfunktion $\mathcal{F}$ ist quadratisch in den Geschwindigkeiten, kann aber nur von Gradienten der Geschwindigkeiten abhängen, da für eine homogene Strömung keine innere Reibung auftreten kann. Weitere Einschränkungen ergeben sich für isotrope Medien. Damit erhält man

$$\mathcal{F}=-\tfrac{1}{2}\int\mathrm{d}\vec{x}\Big[\mu\,\big(\vec{u}(\vec{x})\cdot\Delta\,\vec{u}(\vec{x})\big)+(\lambda+\mu)\big(\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}\big)\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}(\vec{x})\big)\Big] \tag{2.7}$$

wobei μ und λ Volum- b.z.w. Scherviskositäten sind.

Damit erhält man mit (2.5) die Navier-Stokes Gleichung für kompressible Fluide

$$\rho(\vec{x},t)\Big\{\big(\partial_t\vec{u}(\vec{x},t)+\big(\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{u}(\vec{x},t)\Big\}-\mu\,\Delta\vec{u}(\vec{x},t)-(\lambda+\tfrac{1}{3}\mu)\vec{\nabla}\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}(\vec{x},t)\big)=\vec{f}(\vec{x},t)-\vec{\nabla}P(\vec{x},t) \tag{2.8}$$

Diese Gleichung ist vollständig in der Euler'schen Beschreibung formuliert. Die Lagrange Beschreibung ist nur insofern benutzt worden, als die Zeitableitung in (2.1) zur Lagrange'schen Zeitableitung in (2.5) b.z.w. (2.8) wurde. Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (1.2) und der Zustandsgleichung (2.6) hat man ein vollständiges System von Gleichungen, die noch durch Randbedingungen ergänzt werden müssen.

Die Navier-Stokes Gleichung ohne Viskositätsbeiträge (Euler Gleichung) wurde von Euler (1755) formuliert, während die volle Gleichung 1827 von Navier und 1845 unabhängig von Stokes gefunden wurde.

2.1 Inkompressible Strömungen

Den Grenzfall inkompressibler Strömung erhält man für Geschwindigkeiten, die klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit sind. Die Dichte kann als konstant angesehen werden, $\rho(\vec{u},t) \approx \rho_o$, und für die Geschwindigkeit gilt

$$\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}(\vec{x},t)\big) = 0 \tag{2.9}$$

Die Navier-Stokes Gleichung wird

$$\partial_t\vec{u}(\vec{x},t) + \big(\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{u}(\vec{x},t) - \nu\Delta\vec{u}(\vec{x},t) = \tfrac{1}{\rho_o}\Big[\vec{f}(\vec{x},t) - \vec{\nabla}P(\vec{x},t)\Big] \tag{2.10}$$

wobei $\nu = \mu/\rho_o$ als kinematische Zähigkeit bezeichnet wird.

Die Dichteschwankungen sind zwar in der c vernachlässigbar, erzeugen aber nicht vernachlässigbare Druckschwankungen. Bildet man die Divergenz der Navier-Stokes Gleichung, erhält man

$$\vec{\nabla}\cdot\Big(\big(\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{u}(\vec{x}) - \tfrac{1}{\rho_o}\vec{f}(\vec{x})\Big) = -\tfrac{1}{\rho_o}\Delta P(\vec{x}) \tag{2.11}$$

Unter Vernachlässigung von Randtermen lässt sich (2.11) integrieren:

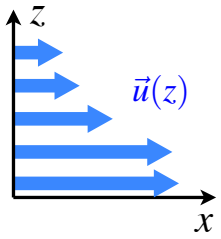
$$\vec{\nabla}P(\vec{x}) = \rho_o\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\,\vec{\nabla}'\cdot\Big(\big(\vec{u}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{u}(\vec{x}') - \tfrac{1}{\rho_o}\vec{f}(\vec{x}')\Big) \tag{2.12}$$

Der Druckterm $\vec{\nabla}P$ ist damit ebenso wichtig wie der Advektionsbeitrag $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ und er vermittelt eine nichtlokale Wechselwirkung der Strömungen an verschiedenen Orten.

2.2 Euler Gleichung

Die Euler Gleichung erhält man aus der Navier-Stokes Gleichung im Grenzfall verschwindender Zähigkeiten (ideale Strömung)

$$\partial_t\vec{u}(\vec{x},t) + \big(\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{u}(\vec{x},t) + \tfrac{1}{\rho_o}\vec{\nabla}P(\vec{x},t) = \tfrac{1}{\rho_o}\vec{f}(\vec{x},t) \tag{2.13}$$



Betrachten wir als Spezialfall eine stationäre kräftefreie inkompressible Strömung in x-Richtung, deren Stärke nur von z abhängt: $\vec{u}(\vec{x}) = u(z)\vec{e}_x$. Für diese Strömung gilt $\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\big) = 0$, und aus (2.11) folgt $P(\vec{x}) = \text{const}$. Damit ist diese Strömung, für beliebige $u(z)$, auch Lösung der Euler Gleichung. Allgemein erlaubt die Euler Gleichung Unstetigkeitsflächen mit Diskontinuitäten der Strömung in tangentialer Richtung. An derartigen Flächen wurde allerdings $\Delta\vec{u}$ divergieren, und die Viskosität könnte nicht vernachlässigt werden. Dies gilt auch für Grenzschichten an Wänden.

17.11.2010

2.3 Reynolds'sches Ähnlichkeitsgesetz

Eine Strömung sei charakterisiert durch eine Längenskala L_o, zum Beispiel die typische Skala von Rändern, eine Geschwindigkeitsskala U_o, zum Beispiel die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und die kinematische Zähigkeit ν, deren Dimension $\mathit{Länge}^2/\mathit{Zeit}$ ist. Aus diesen drei Kenngrößen lässt sich eine dimensionslose Zahl, die sogenannte Reynolds Zahl

$$Re = \frac{U_o\,L_o}{\nu} \tag{2.14}$$

Der Advektionsterm in der Navier-Stokes Gleichung, und auch der Druckterm sind von der Größenordnung $\sim U_o^2/L_o$, der Beitrag der Viskosität ist $\sim \nu U_o/L_o^2$. Die Reynolds Zahl ist damit ein Maß für den relativen Beitrag dieser Terme. Im Grenzfall großer Re erwartet man dass die Strömung durch die Euler Gleichung beschrieben wird. Für kleine Re erhält man die lineare Stokes Gleichung ohne Druckterm.

Es sei $\vec{u}(\vec{x},t)$ eine Lösung der Navier-Stokes Gleichung in einer Geometrie auf der Skala L_o und mit der Zähigkeit ν. Dann ist

$$\vec{u}'(\vec{x}',t') = \tfrac{\nu'}{\nu}\,\tfrac{L_o'}{L_o}\,\vec{u}\big(\tfrac{L_o}{L_o'}\,\vec{x},\tfrac{L_o^2\,\nu'}{L_o'^2\,\nu}\,t'\big) \tag{2.15}$$

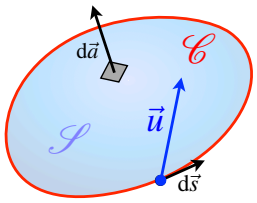
ebenfalls Lösung.

Typische Reynolds Zahlen sind:

Mikroorganismen	$10^{-5}\ \cdots\ 10^{-2}$	Vögel	$10^{3}\ \cdots\ 10^{5}$
Staub	$10^{0}\ \cdots\ 10^{1}$	Flugzeug	$10^{6}\ \cdots\ 10^{8}$
Insekten	$10^{2}\ \cdots\ 10^{3}$	Atmosphäre, Meeresströmungen	$10^{9}\ \cdots\ 10^{10}$

3 Wirbelsätze in inkompressiblen Strömungen

3.1 Zirkulation, Thomson'scher Wirbelsatz



Die Zirkulation entlang einer geschlossenen Kurve $\mathcal{C}$ ist definiert als

$$\Gamma_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \big(\mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{u}(\vec{s},t)\big) = \int_{\mathcal{S}} \big(\mathrm{d}\vec{a}\cdot\big[\vec{\nabla}\times\vec{u}(\vec{a},t)\big]\big) \tag{3.1}$$

wobei der Stoke'sche Integralsatz benutzt wurde.
Betrachtet man die Kurve $\mathcal{C}$ als mitschwimmend, besagt der Thompson'sche Wirbelsatz, dass die Zirkulation $\Gamma_{\mathcal{C}}$ zeitlich konstant ist.

Die Lagrange'sche Zeitableitung obiger Gleichung ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\Gamma_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \Big\{\mathrm{d}\vec{s}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}(\vec{s},t) + \vec{u}(\vec{s},t)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\vec{s}\Big\} \tag{3.2}$$

Für eine ideale Strömung lässt sich der erste Term mit der Euler Gleichung (2.13) berechnen:

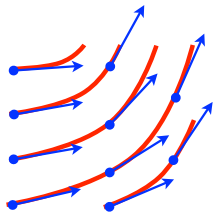
$$\mathrm{d}\vec{s}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}(\vec{s},t) = \tfrac{1}{\rho_o}\big\{\mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{f}(\vec{s},t) - \big(\mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{\nabla}\big)P(\vec{s},t)\big\} \tag{3.3}$$

Bei der Berechnung des zweiten Terms ist zu berücksichtigen, dass sich die Endpunkte des Linienelements mit unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\vec{s} = \vec{u}(\vec{s}+\mathrm{d}\vec{s},t) - \vec{u}(\vec{s},t) = \big(\mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{\nabla}\big)\,\vec{u}(\vec{s},t) \qquad \vec{u}(\vec{s},t)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\vec{s} = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{\nabla}\big)\,u(\vec{s},t)^2 \tag{3.4}$$

Berücksichtigt man die allgemeine Identität $\int_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{\nabla}\,f(\vec{s}) = 0$, erhält man, falls auch die äußeren Kräfte als Gradient eines Potentials gegeben sind, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\Gamma_{\mathcal{C}} = 0$. Der Thomson'scher Wirbelsatz gilt nur für vernachlässigbare Viskositätsbeiträge.

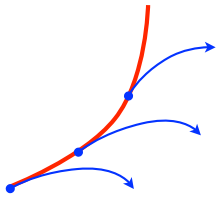
3.2 Stromlinien, Teilchentrajektorien, Wirbellinien



Eine Stromlinien, die durch einen Punkt $\vec{x}_o$ geht, kann durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\,\vec{x}_s(\ell;\vec{x}_o)=\vec{u}\big(\vec{x}_s(\ell;\vec{x}_o)\big) \tag{3.5}$$

mit $\vec{x}_s(0;\vec{x}_o)=\vec{x}_o$ definiert werden. Damit ist eine Stromlinie in jedem Punkt tangential zum Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(\vec{x})$.



Eine Teilchentrajektorie für ein Teilchen am Ort $\vec{x}_o$ zu einer Zeit t_o ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\,\vec{x}_T(t;\vec{x}_o)=\vec{u}\big(\vec{x}_T(t;\vec{x}_o)\big) \tag{3.6}$$

Für stationäre Strömungen sind Stromlinien und Teilchentrajektorien identisch. Dies gilt aber im allgemeinen nicht für zeitabhängige Strömungen.

Für inkompressible Strömungen ist das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}$ allein durch die Wirbelstärke $\vec{\omega}$, also deren Rotation bestimmt

$$\vec{\omega}(\vec{x},t)=\big[\vec{\nabla}\times\vec{u}(\vec{x},t)\big] \tag{3.7}$$

Mit der Navier-Stokes Gleichung (2.10) erhält man

$$\partial_t\vec{\omega}(\vec{x},t)+\big[\vec{\nabla}\times\big(\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\vec{u}(\vec{x},t)\big]=\nu\,\Delta\vec{\omega}(\vec{x},t)+\tfrac{1}{\rho_o}\big[\vec{\nabla}\times\vec{f}(\vec{x},t)\big] \tag{3.8}$$

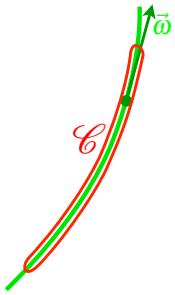
Dies lässt sich umformen in

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}(\vec{x},t)=\big(\omega(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\,\vec{u}(\vec{x},t)+\nu\,\Delta\vec{\omega}(\vec{x},t)+\tfrac{1}{\rho_o}\big[\vec{\nabla}\times\vec{f}(\vec{x},t)\big] \tag{3.9}$$

Wirbellinien sind analog zu (3.5) definiert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\,\vec{x}_w(\ell;\vec{x}_o)=\vec{\omega}\big(\vec{x}_w(\ell;\vec{x}_o)\big) \tag{3.10}$$

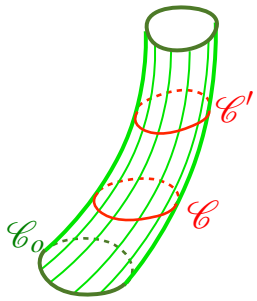
3.3 Helmholtz'sche Wirbelsätze



Betrachten wir eine Wirbellinie und eine geschlossene Kurve $\mathcal{C}$, wie in der Figur gezeigt. Berechnet man die Zirkulation als Integral über eine in $\mathcal{C}$ eingespannte Fläche $\mathcal{S}$, findet man mit (3.1) $\Gamma_{\mathcal{C}}=0$, da die Flächennormale $\mathrm{d}\vec{a}$ senkrecht auf $\vec{\omega}=\big[\vec{\nabla}\times\vec{u}\big]$ steht.

Mit der Zeit schwimmt die Wirbellinie zusammen mit $\mathcal{C}$ mit der Strömung. Aufgrund der Thomsompt'schen Satzes bleibt $\Gamma_{\mathcal{C}}=0$ und $\vec{\omega}(\vec{x}_w)$ ist weiterhin tangential zur betrachteten Linie. Diese behält also ihren Charakter als Wirbellinie. Dies ist einer der Helmholtz'schen Wirbelsätze.

Eine sogenannte Wirbelröhre wird aus Wirbellinien gebildet, die von einer Kurve $\mathcal{C}_o$ ausgehen. Da die Wirbellinien dicht liegen und mit der Strömung mitschwimmen, können Teilchen nicht von innen nach aussen gelangen, oder umgekehrt. In einer inkompressiblen Strömung bleibt damit das Volumen der Wirbelröhre erhalten. Dies ist ein weiterer Helmholtz'scher Wirbelsatz.



Ein dritter Helmholtz'scher Wirbelsatz besagt, dass die Zirkulation $\Gamma_{\mathcal{C}}$ entlang einer Wirbelröhre konstant ist. Um dies zu zeigen betrachtet man zwei Kurven $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$. Die Berechnung der Zirkulation $\Gamma_{\mathcal{C}}$ kann auf einer beliebigen Fläche, die durch $\mathcal{C}$ begrenzt ist, erfolgen. Wählt man eine Fläche, die auf dem Mantel der Wirbelröhre zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ liegt und einer Fläche, die in $\mathcal{C}'$ eingespannt ist, Trägt die Fläche auf dem Mantel nicht bei, da hier $\left(\mathrm{d}\vec{a}\cdot\vec{\omega}\right) = 0$ ist. Damit ist $\Gamma_{\mathcal{C}} = \Gamma_{\mathcal{C}'}$.

Wie auch schon bei der Herleitung des Thompson'schen Wirbelsatzes wird auch hier eine ideale Strömung ohne Viskosität vorausgesetzt.

Eine Konsequenz der Helmholtz'scher Wirbelsätze ist, dass in einer idealen Strömung Wirbel nicht entstehen oder vergehen können.

3.4 Ebene Strömungen

Als ebene Strömung bezeichnen man eine Strömung, in der $u_z = 0$ ist und u_x wie auch u_y nur von x und y abhängen. Die Wirbelstärke hat damit nur eine nicht verschwindende z-Komponente $\omega_z(x,y)$. In einer idealen kräftefreien Strömung folgt aus (3.9), dass die Wirbelstärke erhalten ist, also $\mathrm{d}\,\omega_z/\mathrm{d}\,t = 0$

22.11.2010

4 Voll ausgebildete Turbulenz: Grundlagen und Skalenverhalten

4.1 Energiesatz

Im Folgendem betrachten wir wieder eine reale inkompressible Strömung. Die Energie ist dann durch die kinetische Energie gegeben. Deren Dichte ist

$$\rho_E(\vec{x},t) = \tfrac{1}{2}\rho_o\, u(\vec{x},t)^2 \tag{4.1}$$

Deren zeitliche Änderung erhält man aus der Navier-Stokes Gleichung (2.10):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_E(\vec{x},t) = -\left(\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\right) P(\vec{x},t) + \left(\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\vec{f}(\vec{x},t)\right) - \nu\,\rho_o\left(\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\Delta\,\vec{u}(\vec{x},t)\right) \tag{4.2}$$

Zur weiteren Behandlung des Viskositätbeitrags ist es zweckmäßig Tensoren der Schergeschwindigkeit und der Rotation einzuführen

$$\eta_{\alpha\beta}(\vec{x},t) = \left\{\partial_{x_\alpha} u_\beta(\vec{x},t) + \partial_{x_\beta} u_\alpha(\vec{x},t)\right\} \qquad \omega_{\alpha\beta}(\vec{x},t) = \left\{\partial_{x_\alpha} u_\beta(\vec{x},t) - \partial_{x_\beta} u_\alpha(\vec{x},t)\right\} \tag{4.3}$$

wobei in drei Dimensionen der antisymmetrische Tensor $\underline{\underline{\omega}}$ als Pseudovector $\vec{\omega}$ geschrieben werden kann. Der letzte Term in (4.2) lässt sich damit umformen

$$\left(\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\Delta\,\vec{u}(\vec{x},t)\right) = -\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{\eta}}(\vec{x},t)\cdot\underline{\underline{\eta}}(\vec{x},t)\right) + \left(\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\eta}}(\vec{x},t)\cdot\vec{u}(\vec{x},t)\right) \tag{4.4}$$

Damit wird (4.2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_E(\vec{x},t) = \left(\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\left[f(\vec{x},t) - \vec{\nabla}\,P(\vec{x},t) + \nu\rho_o\left(\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\eta}}(\vec{x},t)\right)\right]\right) - \varepsilon(\vec{x}) \tag{4.5}$$

Die mitschwimmende Änderung der Energiedichte ist damit durch Arbeit gegeben, die durch äußere Volumkräfte, sowie Gradienten des Drucks und viskoser Scherkräfte, geleistet wird. Der letzte Term beschreibt lokale Energiedissipation aufgrund der Viskosität:

$$\varepsilon(\vec{x},t) = \tfrac{1}{2}\rho_o\,\nu\,\mathrm{Tr}\left(\underline{\underline{\eta}}(\vec{x},t)\cdot\underline{\underline{\eta}}(\vec{x},t)\right) \tag{4.6}$$

Bei der Berechnung der Energie als Integral über ρ_E kann der zweite und dritte Beitrag auf der rechten Seite von (4.5) in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden, trägt also bei geeigneten Randbedingungen nicht bei.

4.2 Energiespektrum

Fouriertransformierte Geschwindigkeit:

$$\vec{u}(\vec{k},t) = \int \mathrm{d}^3x\, \mathrm{e}^{-i\,(\vec{k}\cdot\vec{x})}\, \vec{u}(\vec{x},t) \qquad\qquad \vec{u}(\vec{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{x})}\, \vec{u}(\vec{k},t) \tag{4.7}$$

Energie:

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}\rho_o \int \mathrm{d}^3x \big(\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{u}(\vec{x})\big) = \tfrac{1}{2}\rho_o \int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{i\,(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}\, \vec{u}(\vec{k})\cdot\vec{u}(\vec{k}') \\ &= \tfrac{1}{2}\rho_o \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\, \vec{u}(-\vec{k})\cdot\vec{u}(\vec{k}) = V\int \mathrm{d}k\, E(k) \end{aligned} \tag{4.8}$$

wobei der letzte Ausdruck das Energiespektrum $E(k)$ bezogen auf die Energie pro Volumen definiert, also

$$E(k) = \frac{k^2\,\rho_o}{4\,\pi^2} \left\langle \vec{u}(-\vec{k})\cdot\vec{u}(\vec{k}) \right\rangle \tag{4.9}$$

Die Mittelung bezieht sich hier zunächst auf alle Richtungen. In der statistischen Theorie voll ausgebildeter isotroper Turbulenz wird über Ensembles verschiedener Realisierungen oder verschiedener externer Kräfte gemittelt.

Die zeitliche Änderung der fouriertransformierten Geschwindigkeit erhält man aus der Navier-Stokes Gleichung (2.10) und der Druckgleichung (2.11). Letztere ergibt zunächst

$$\tfrac{1}{\rho_o}\, P(\vec{k}) = -\frac{1}{k^2}\Big\{ \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3} \left(\vec{k}\cdot\vec{u}(\vec{k}')\right) \left(\vec{k}\cdot\vec{u}(\vec{k}-\vec{k}')\right) - \tfrac{1}{\rho_o} \left(\vec{k}\cdot\vec{f}(\vec{k})\right) \Big\} \tag{4.10}$$

Mit Hilfe eines transversalen Projektors $\underline{\underline{\Theta}}(\vec{k})$ mit Komponenten

$$\Theta_{\alpha\beta}(\vec{k}) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha\, k_\beta}{k^2} \qquad\qquad \underline{\underline{\Theta}}(\vec{k})\cdot\vec{k} = 0 \qquad\qquad \underline{\underline{\Theta}}(\vec{k})\cdot\vec{u}(\vec{k}) = \vec{u}(\vec{k}) \tag{4.11}$$

erhält man aus (2.10)

$$\partial_t\, \vec{u}(\vec{k},t) + i \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3} \left(\vec{k}\cdot\vec{u}(\vec{k}-\vec{k}',t)\right) \underline{\underline{\Theta}}(\vec{k})\cdot\vec{u}(\vec{k}',t) + \nu\, k^2\, \vec{u}(\vec{k},t) = \underline{\underline{\Theta}}(\vec{k})\cdot\vec{f}(\vec{k},t) \tag{4.12}$$

Die Änderung des Energiespektrums ist damit

$$\begin{aligned} \partial_t E(k,t) &= \frac{k^2\,\rho_o}{2\pi^2} \left\langle \vec{u}(-\vec{k},t)\cdot\partial_t\vec{u}(\vec{k},t) \right\rangle \\ &= \frac{k^2\,\rho_o}{2\pi^2} \left\langle \vec{u}(-\vec{k},t)\cdot\vec{f}(\vec{k},t) \right\rangle - \nu\, k^2\, E(k,t) \\ &\quad -i\,\frac{k^2\,\rho_o}{2\pi^2} \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3} \left\langle \big(\vec{k}\cdot\vec{u}(\vec{k}-\vec{k}',t)\big)\big(\vec{u}(-\vec{k},t)\cdot\vec{u}(\vec{k}',t)\big) \right\rangle \\ &= \dot{F}_f(k,t) + \dot{F}_{diss}(k,t) + \dot{F}_{tr}(k,t) \end{aligned} \tag{4.13}$$

Die einzelnen Terme haben folgende Bedeutung: $\int\mathrm{d}k\,\dot{F}_f(k,t)$ ist die von äußeren Kräften geleistete Arbeit. $\int\mathrm{d}k\,\dot{F}_{diss}(k,t)$ ist die aufgrund der Zähigkeit dissipierte Energie. Im Fall ausgebildere Turbulenz bei großen Re sind die externen Kräfte auf großer Längenskala, oder kleinen Wellenvektoren, wirksam, während die Dissipation erst bei großen Wellenvektoren dominiert.

Der Beitrag $\dot{F}_{tr}(k,t)$ vermittelt einen Energietransfer zwischen verschiedenen Bereichen der Wellenlänge. Er ist, wie wir noch sehen werden, für die Energiekaskade verantwortlich. Er trägt nicht zur gesamten Energiebilanz bei, i.e. $\int\mathrm{d}k\,\dot{F}_{tr}(k,t)=0$. Um dies zu zeigen betrachten wir die Größe

$$A(\vec{k};\vec{\kappa},\vec{\kappa}')=\frac{i\,\rho_o}{2}\Big\{\Big\langle\big(\vec{k}\cdot\vec{u}(\vec{\kappa})\big)\big(\vec{u}(\vec{\kappa}')\cdot\vec{u}(\vec{k})\big)\Big\rangle+\Big\langle\big(\vec{k}\cdot\vec{u}(\vec{\kappa}')\big)\big(\vec{u}(\vec{\kappa})\cdot\vec{u}(\vec{k})\big)\Big\rangle\Big\}\tag{4.14}$$

Für $\vec{k}+\vec{\kappa}+\vec{\kappa}'=0$ ist

$$A(\vec{k};\vec{\kappa},\vec{\kappa}')+A(\vec{\kappa};\vec{k},\vec{\kappa}')+A(\vec{\kappa}';\vec{k},\vec{\kappa})=0\tag{4.15}$$

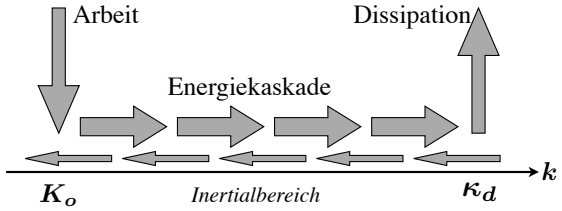
Das Integral über $\dot{F}_{tr}(k,t)$ ist damit

$$\int\mathrm{d}k\;\dot{F}_{tr}(k,t)=\int\frac{\mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}^3\kappa\,\mathrm{d}^3\kappa'}{(2\pi)^2}\,\delta(\vec{k}+\vec{\kappa}+\vec{\kappa}')\,A(\vec{k};\vec{\kappa},\vec{\kappa}')=0,\tag{4.16}$$

wie man mit (4.14) durch Permution der Integrationsvariablen sieht.

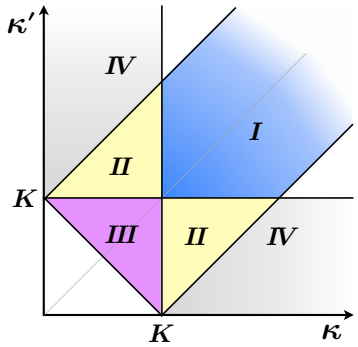
4.3 Energiekaskade

Im Fall von Turbulenz bei hoher Reynolds-Zahl wird Energie auf großer Längenskala oder bei kleinen Wellenvektoren K_o durch äußere Kräfte oder großräumige Bewegung in die Strömung eingebracht. Die Viskosität wird erst bei kleinen Längenskalen oder großen Wellenvektoren κ_d wirksam. Energie muss also von großen zu kleinen Strukturen oder von kleinen zu großen Wellenvektoren transferiert werden, ein Prozess, der als Energiekaskade bezeichnet wird.



Betrachte einen Wellenvektor K mit $K_o\ll K\ll\kappa_d$. Die Transferrate von Energie von kleinen Wellenzahlen $k<K$ zu größeren Wellenzahlen $k>K$ ist

$$\Pi(K,t)=\int_0^K\mathrm{d}k\,\dot{F}_{tr}(k,t)=-\int_K^\infty\mathrm{d}k\,\dot{F}_{tr}(k,t)=\int_0^K\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3\kappa\,\mathrm{d}^3\kappa'}{(2\pi)^3}\,\delta(\vec{k}+\vec{\kappa}+\vec{\kappa}')\,A(\vec{k};\vec{\kappa},\vec{\kappa}')\tag{4.17}$$



Aufgrund von (4.15) verschwinden die Beiträge zu obigem Integral für $k,\kappa,\kappa'<K$. Nicht verschwindende Beiträge erhält man für $k<K<\kappa,\kappa'$, Bereich I, und für $k,\kappa<K<\kappa'$ beziehungsweise $k,\kappa'<K<\kappa$, Bereich II. Letzterer kann mit (4.15) in ein Integral über $\kappa,\kappa'<K<k$, Bereich III, umgewandelt werden. Damit ist

$$\begin{aligned}\Pi(K,t)=&\int_0^K\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\int_K^\infty\frac{\mathrm{d}^3\kappa\,\mathrm{d}^3\kappa'}{(2\pi)^3}\,\delta(\vec{k}+\vec{\kappa}+\vec{\kappa}')\,A(\vec{k};\vec{\kappa},\vec{\kappa}')\\&-\tfrac{1}{2}\int_0^K\frac{\mathrm{d}^3\kappa\,\mathrm{d}^3\kappa'}{(2\pi)^3}\int_K^{2K}\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\delta(\vec{k}+\vec{\kappa}+\vec{\kappa}')\,A(\vec{k};\vec{\kappa},\vec{\kappa}')\end{aligned}\tag{4.18}$$

Das erste Integral beschreibt einen Energietransfer von langwelligen zu kurzwelligen Strukturen, das zweite Integral den umgekehrten Prozess. In drei Dimensionen dominiert der Transfer zu kleineren Strukturen, also der erste Term in (4.18). Die Hauptbeiträge zu beiden Integralen kommen von

k, $\kappa\,\kappa' \sim K$. Die Energie wird also nicht direkt von kleinen Wellenzahlen zu großen übertragen, sondern bei großen Reynolds-Zahlen in vielen Einzelschritten. Diesen Prozess bezeichnet man als Energiekaskade.

4.4 Naive Skalenanalyse, Kolmogorov 41 Skalierung

Voll ausgebildete Turbulenz ist durch das Auftreten verschiedener Längenskalen charakterisiert. Im folgendem betrachten wir stationäre Turbulenz, die durch äußere Kräfte oder Randbedingungen aufrecht erhalten wird.

Die größte Längenskala sei L_o. Hier wird die Energie durch äußere Kräfte oder geeignete zeitabhängige Randbedingungen in die Strömung eingebracht. Die typische Geschwindigkeit auf dieser Skala sei U_o. Aufgrund naiver Dimensionsbetrachtung ist eine typische Zeitskala $t_o \sim L_o/U_o$ und die eingebrachte Energie pro Zeit ist

$$\varepsilon_o \sim \rho_o\, U_o^2/t_o \sim \rho_o\, U_o^3/L_o \tag{4.19}$$

Auf einer mittleren Längenskala L sei die typische Geschwindigkeit u_L und die Zeitskala $t_L \sim L/u_L$. Dies ergibt für den Energietransfer eine Abschätzung

$$\varepsilon_L \sim \rho_o\, u_L^3/L \tag{4.20}$$

Auf der kürzesten Längenskala λ_D, der sogenannten Dissipationslänge, wird die eingebrachte Energie dissipiert. Diese ist einerseits aus obiger Gleichung für $L = \lambda_D$, andererseits durch (4.6) gegeben:

$$\varepsilon_D \sim \rho_o\, u_D^3/\lambda_D \sim \nu\, \rho_o\, u_D^2/\lambda_D^2 \tag{4.21}$$

Im stationären Fall ist $\varepsilon_{in} = \varepsilon_L = \varepsilon_D = \varepsilon$.
Daraus erhält man die Abschätzung $U_o^3/L_o = u_L^3/L = u_D^3/\lambda_D$ und mit (2.14)

$$\lambda_D = Re^{-3/4}\, L_o \tag{4.22}$$

und für die entsprechenden Zeitskalen

$$t_D = Re^{-1/2}\, t_o \tag{4.23}$$

Danach zerfallen kleinere Strukturen schneller als größere.

Der Anteil von kleinräumigen Strukturen mit einer Ausdehnung kleiner L an der Energie ist mit (4.20)

$$\rho_E^{(L)} \sim \tfrac{1}{2}\, \rho_o\, u_L^2 \sim \tfrac{1}{2}\, \rho_o^{1/3}\, \varepsilon^{2/3}\, L^{2/3} \tag{4.24}$$

Für $L = 2\pi/K$ kann dieser aber auch durch das Energiespektrum (4.9) berechnet werden

$$\rho_E^{(L)} = \int_{2\pi/L}^{\infty} \mathrm{d}k\, E(k) \tag{4.25}$$

Differentiaion beider Ausdrücke nach L liefert

$$E(K) \sim \rho_o^{1/3}\, \varepsilon^{2/3}\, K^{-5/3} \tag{4.26}$$

Dieses Gesetz wurde von Kolmogorov 1941 und unabhängig davon von Weizsäcker und Heisenberg 1945, Onsager, Prandtl und anderen aufgestellt. Die wesentlichen Annahmen betreffen die Existenz einer Energiekaskade, also des schrittweisen Transfers der Energie von großen zu kleinen Strukturen, sowie der Annahme, dass das Energiespektrum allein vom Wellenvektor und der Dissipationsrate der Energie abhängt.

1.12.2010

5 Reynolds Gleichungen, Wirbelviskosität

5.1 Großräumige Strömung

Ein wichtiger Beitrag zur Theorie voll ausgebildeter Turbulenz, aber auch zur Berechnung aktueller inhomogener Strömungen, ist die von Reynolds 1890 vorgeschlagene Zerlegung der Strömung in groß- und kleinskalige Beiträge. Statt einer Trennung im Fourierraum wird über kleinskalige Bewegung gemittelt. Es sei

$$\vec{U}(\vec{x},t) = \Big\langle \vec{u}(\vec{x},t)\Big\rangle_L \qquad\qquad \vec{u}(\vec{x},t) = \vec{U}(\vec{x},t) + \vec{v}(\vec{x},t) \tag{5.1}$$

wobei $\langle\cdots\rangle_L$ eine Mittelung über ein Volumen $V_L = L^3$ oder eine Zeit $t_L = (L_o/L)^{-2/3}\, t_o$ sei. Entsprechend wird der Druck aufgeteilt in

$$P(\vec{x},t) = \overline{P}(\vec{x},t) + p(\vec{x},t) \tag{5.2}$$

Wegen der Nichtlinearität in (2.11) enthält $\overline{P}(\vec{x},t)$ auch Anteile, die die kleinräumigen Strömungen enthalten. Für inkompressible Strömungen können beide Anteile entsprechend (2.11) bestimmt werden. Die äußeren Kräfte seien auf die größten Längenskala beschränkt, also $\Big\langle \vec{f}(\vec{x},t)\Big\rangle_L = \vec{f}(\vec{x},t)$.

Die Reynolds-Gleichung erhält man durch Mittelung der Navier-Stokes Gleichung (2.10)

$$\partial_t \vec{U}(\vec{x},t) + \big(\vec{U}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\,\vec{U}(\vec{x},t) - \nu\,\Delta\,\vec{U}(\vec{x},t) = \tfrac{1}{\rho_o}\Big\{\vec{f}(\vec{x},t) - \vec{\nabla}\overline{P}(\vec{x},t) - \big(\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\mathrm{T}}}(\vec{x},t)\big)\Big\} \tag{5.3}$$

Dabei ist $\underline{\underline{\mathrm{T}}}$ der Reynolds-Spannungstensor mit Komponenten

$$T_{\alpha\beta}(\vec{x},t) = \rho_o\,\Big\langle v_\alpha(\vec{x},t)\,v_\beta(\vec{x},t)\Big\rangle_L \qquad\qquad \underline{\underline{\mathrm{T}}}(\vec{x},t) = \rho_o\,\Big\langle \vec{v}(\vec{x},t)\otimes\vec{v}(\vec{x},t)\Big\rangle_L \tag{5.4}$$

Mit $T_o(\vec{x},t) = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\big(\underline{\underline{\mathrm{T}}}(\vec{x},t)\big) = \frac{2}{3}\rho_E^{(L)}$ ist dessen spurfreie Anteil $\hat{\underline{\underline{\mathrm{T}}}}(\vec{x},t)$ gegeben durch

$$\hat{T}_{\alpha\beta}(\vec{x},t) = T_{\alpha\beta}(\vec{x},t) - T_o(\vec{x},t)\,\delta_{\alpha\beta} \tag{5.5}$$

Die Mittelung in (5.4) hängt von der großräumigen Strömung $\vec{U}(\vec{x},t)$ ab. Für $\vec{U}(\vec{x},t) = 0$ ist die Mittelung isotrop und $\hat{\underline{\underline{\mathrm{T}}}}(\vec{x},t) = 0$. Der Beitrag erster Ordnung in einer Entwicklung nach $\vec{U}(\vec{x},t)$ verschwindet nicht, kann aber nur von der großräumigen Schergeschwindigkeit $\overline{\underline{\underline{\eta}}}(\vec{x},t)$ mit Komponenten

$$\overline{\eta}_{\alpha\beta}(\vec{x},t) = \tfrac{1}{2}\Big\{\partial_{x_\alpha} U_\beta(\vec{x},t) + \partial_{x_\beta} U_\alpha(\vec{x},t)\Big\} \tag{5.6}$$

abhängen. In dieser Ordnung muss $\hat{\underline{\underline{\mathrm{T}}}}(\vec{x},t)$ proportional zu $\overline{\underline{\underline{\eta}}}(\vec{x},t)$ sein.

Definiert man eine L-abhängige effektive Wirbelviskosität ν_L

$$\hat{\underline{\underline{\mathrm{T}}}}(\vec{x},t) = -\nu_L\,\rho_o\,\overline{\underline{\underline{\eta}}}(\vec{x},t) \tag{5.7}$$

wird die Reynolds-Gleichung (5.3)

$$\partial_t \vec{U}(\vec{x},t) + \big(\vec{U}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\,\vec{U}(\vec{x},t) - \big(\nu+\nu_L\big)\,\Delta\,\vec{U}(\vec{x},t) = \tfrac{1}{\rho_o}\big[\vec{f}(\vec{x},t) - \vec{\nabla}\big(\overline{P}(\vec{x},t) + T_o(\vec{x},t)\big)\big] \tag{5.8}$$

Sie entspricht damit der Navier-Stokes-Gleichung mit einer effektiven Wirbelviskosität. Die von der groß- auf die kleinräumige Strömung übertragene Energiedichte ist entsprechend (4.6) gegeben durch

$$\varepsilon_L(\vec{x},t) = \tfrac{1}{2}\rho_o\,\nu_L\,\mathrm{Tr}\big(\overline{\underline{\underline{\eta}}}(\vec{x},t)\cdot\overline{\underline{\underline{\eta}}}(\vec{x},t)\big) \tag{5.9}$$

K41 Skalierung (naive Dimensionsanalyse) liefert für die Wirbelviskosität

$$\nu_L \sim \Big(\frac{L}{\lambda_D}\Big)^{4/3} \nu \tag{5.10}$$

Entsprechende Resultate erhält man auch aus der vorhergehenden Zerlegung der Strömung im Fourierraum. Der Reynolds'sche Spannungstensor wäre hier durch

$$\underline{\underline{\mathrm{T}}}(\vec{k},t) = \rho_o \int_K^\infty \frac{\mathrm{d}^3\kappa\, \mathrm{d}^3\kappa'}{(2\pi)^3}\, \delta(\vec{k}+\vec{\kappa}+\vec{\kappa}') \, \Big\langle \big(\vec{u}(\vec{\kappa},t)\otimes\vec{u}(\vec{\kappa}',t)\big)\Big\rangle \tag{5.11}$$

gegeben, wobei der Mittelwert entsprechend nach der Strömung mit kleinen Wellenvektoren zu entwickeln ist.

5.2 Kleinräumige Strömung und Wirbelviskosität

Die Bewegungsgleichung für die kleinräumige Strömung folgt wieder aus der Navier-Stokes Gleichung (2.10):

$$\begin{aligned}\partial_t\, \vec{v}(\vec{x},t) \,+\, \big(\vec{U}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\, \vec{v}(\vec{x},t) + \big(\vec{v}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\, \vec{U}(\vec{x},t) \quad + \big(\vec{v}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\, \vec{v}(\vec{x},t) - \nu\, \Delta\, \vec{v}(\vec{x},t) \\ = \tfrac{1}{\rho_o}\Big\{ -\vec{\nabla} p(\vec{x},t) + \big(\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\mathrm{T}}}(\vec{x},t)\big)\Big\}\end{aligned} \tag{5.12}$$

Der Druck ist wieder durch $\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{x},t)\big) = 0$ bestimmt. Der letzte Term sorgt dafür, dass $\langle\vec{v}\rangle_L = 0$ bleibt.

Für den Reynolds'schen Spannungstensor erhält man

$$\begin{aligned}\Big\{\partial_t + \big(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}\big)\Big\}\, T_{\alpha\beta} + \Big\langle v_\alpha\big(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\big)\big(U_\beta+v_\beta\big) + v_\beta\big(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\big)\big(U_\alpha+v_\alpha\big) - \nu\big(v_\alpha\Delta v_\beta + v_\beta\Delta v_\alpha\big)\Big\rangle_L \\ = -\tfrac{1}{\rho_o}\Big\langle\big\{v_\alpha\nabla_\beta + v_\beta\nabla_\alpha\big\}\, p\Big\rangle_L + \sum_\gamma \Big\langle v_\alpha\nabla_\gamma T_{\gamma\beta} + v_\beta\nabla_\gamma T_{\gamma\alpha}\Big\rangle_L\end{aligned} \tag{5.13}$$

Die Mittelungen $\langle\cdots\rangle_L$ hängen auch hier von der größräumigen Strömung $\vec{U}$ ab. In niedrigster Ordnung, unter Vernachlässigung dieser Abhängigkeit, sind die Mittelwerte isotrop und translationsinvariant. Dadurch vereinfacht sich obige Gleichung. Mit $\mathrm{Tr}\big(\underline{\underline{\mathrm{T}}}\big) = 2\rho_E^{(L)}$ erhält man

$$\Big\{\partial_t + \big(\vec{U}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\Big\}\, \rho_E^{(L)}(\vec{x},t) = -\Big\langle \vec{v}(\vec{x},t)\cdot\underline{\overline{\eta}}(\vec{x},t)\cdot\vec{v}(\vec{x},t)\Big\rangle_L + \nu\Big\langle\vec{v}(\vec{x},t)\cdot\Delta\vec{v}(\vec{x},t)\Big\rangle_L \tag{5.14}$$

und für $\underline{\underline{\hat{\mathrm{T}}}}$

$$\Big\{\partial_t + \big(\vec{U}(\vec{x},t)\cdot\vec{\nabla}\big)\Big\}\underline{\underline{\hat{\mathrm{T}}}}(\vec{x},t) = -\tfrac{4}{3}\,\rho_E^{(L)}(\vec{x},t)\,\underline{\overline{\eta}}(\vec{x},t) + \nu\,\rho_o\Big\langle\tilde{\underline{\eta}}(\vec{x},t)\cdot\tilde{\underline{\eta}}(\vec{x},t) - \tfrac{1}{3}\mathrm{Tr}\big(\tilde{\underline{\eta}}(\vec{x},t)\cdot\tilde{\underline{\eta}}(\vec{x},t)\big)\Big\rangle_L \tag{5.15}$$

wobei die kleinräumige Schergeschwindigkeit

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta}(\vec{x}) = \tfrac{1}{2}\big\{\nabla_\alpha\, v_\beta(\vec{x}) + \nabla_\beta\, v_\alpha(\vec{x})\big\} \tag{5.16}$$

ist.

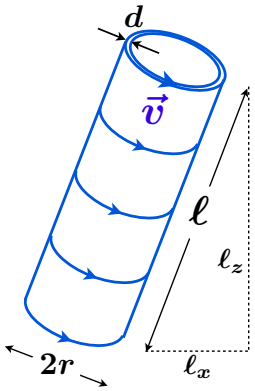
Selbst in dieser Näherung sind diese Gleichungen nicht geschlossen, da auf der rechten Seite Erwartungswerte über die kleinräumige Strömungen auftreten, die nicht auf $\underline{\underline{\hat{\mathrm{T}}}}$ zurückgeführt werden können.

Eine zuverlässige Berechnung der Wirbelviskosität ist damit nicht möglich. Für praktische Rechnungen werden deshalb oft phänomenologische Ansätze erfolgreich benutzt.

5.3 Wirbeldehnung

Der physikalische Prozess des Energietransfers im Inertialbereich, $L_o \gg l \gg \lambda_D$ besteht in einer mittleren Dehnung kleinräumiger Strukturen. Dies wird durch den ersten Term auf der rechten Seite von (5.14) beschrieben.

Betrachten wir als Beispiel eine großräumige Strömung der Form



$$\underline{\underline{\eta}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\eta & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

und einen Wirbelröhre mit Radius r, Dicke d und Länge ℓ. Die Achse des Wirbels sei um einen Winkel ϑ gegenüber der z-Achse geneigt. Die Änderung der Projektionen ℓ_x und ℓ_z ist

$$\dot{\ell}_x(t) = -\tfrac{1}{2}\eta\ell_x(t) \qquad \dot{\ell}_z(t) = \eta\ell_z(t) \tag{5.18}$$

und mit $\ell_x(0) = \sin(\vartheta)\,\ell$ und $\ell_z(0) = \cos(\vartheta)\,\ell$ erhält man für die Länge $\ell(t)$

$$\ell(t) = \sqrt{e^{2\eta t}\,\cos(\vartheta)^2 + e^{-\eta t}\,\sin(\vartheta)^2}\,\ell(0) \tag{5.19}$$

Das Volumen $V = 2\pi\,\ell(t)r(t)d(t)$ und die Zirkulation $Z = 2\pi\,r(t)v(t)$ bleiben entsprechend der Wirbelsätze konstant und man erhält

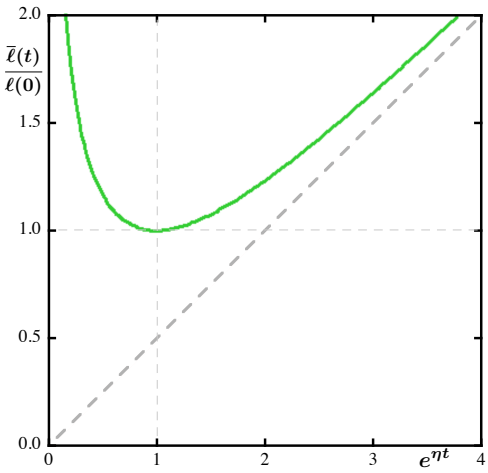
$$r(t) = \sqrt{\frac{\ell(0)}{\ell(t)}}\,r(0) \qquad d(t) = \sqrt{\frac{\ell(0)}{\ell(t)}}\,d(0) \qquad v(t) = \sqrt{\frac{\ell(t)}{\ell(0)}}\,v(0) \tag{5.20}$$

und die Energie ist

$$E_V(t) = \tfrac{1}{2}\rho_o V\,v(t)^2 = \frac{\ell(t)}{\ell(0)}\,E_V(0) \tag{5.21}$$

Je nach Orientierung kann die Wirbelröhre gedehnt oder gestaucht werden. Zur Abschätzung des Effektes mitteln wir über alle Orientierungen

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\ell}(t)}{\ell(0)} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \int_o^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sqrt{\mathrm{e}^{2\eta t}\cos(\vartheta)^2 + \mathrm{e}^{-\eta t}\sin(\vartheta)^2} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}w\,\sqrt{\mathrm{e}^{-\eta t} + \left(\mathrm{e}^{2\eta t} - \mathrm{e}^{-\eta t}\right) w^2} \end{aligned} \tag{5.22}$$



Die nebenstehende Figur zeigt $\overline{\ell}(t)/\ell(0)$ als Funktion von $\mathrm{e}^{\eta t}$. Man sieht, dass unabhängig vom Vorzeichen von η im Mittel immer eine Dehnung erfolgt und dass damit im Mittel Energie aus großräumigen in kleinräumige Strukturen übertragen wird.
Dieser Prozess ist durch die Lebensdauer der betrachteten Strukturen begrenzt. Für eine Struktur der Größe L ist diese $t_L \sim L/u_L$. Für $\eta\,t_L \ll 1$ kann man obigen Ausdruck entwickeln und erhält

$$\frac{\overline{\ell}(t_L)}{\ell(0)} \approx 1 + \tfrac{2}{5}\,\eta^2\,t_L^2 \tag{5.23}$$

Damit ist die Rate der auf der Längenskala L übertragenen Energiedichte

$$\varepsilon_L \sim \rho_o\,v_L^2\,t_L\,\eta^2 \sim \nu_L\,\eta^2 \tag{5.24}$$

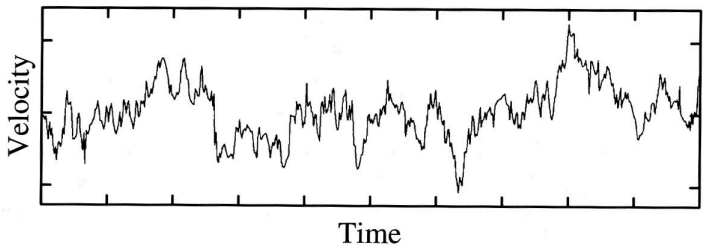
K41 Skalenanalyse liefert für die hier abgeschätzte Wirbelviskosität wieder das Resultat (5.10). Diese Überlegungen zeigen aber auch, dass die auf der Skala L übertragene Energie proportional zur bereits vorhandenen Energie der kleinräumigen Bewegung ist.

6.12.2010

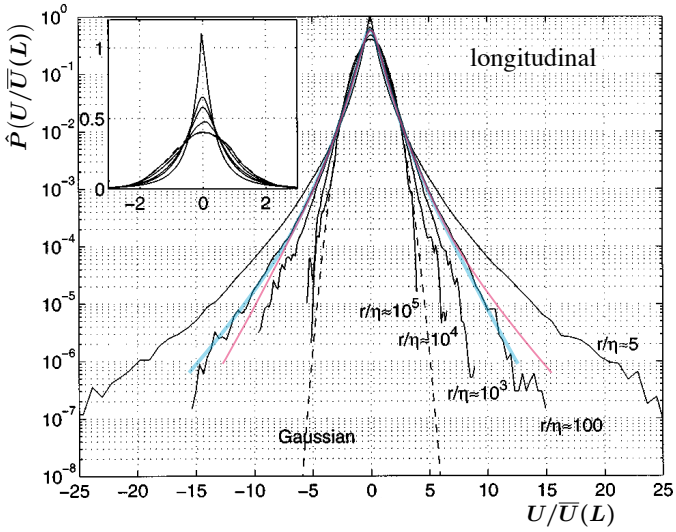
6 Intermittenz, Kolmogorov-Obukhov 1962

6.1 Experimente

In vielen Experimenten wird die Geschwindigkeit lokal als Funktion der Zeit gemessen. Ist einer turbulente Strömung eine konstatnte Grundströmung $\vec{U}_o$ überlagert, lässt sich aus der lokalen Messung Information über die räumliche Struktur gewinnen. Aufgrund der K41 Skalenanalyse zerfällt eine Struktur der Länge L in einer Zeit $t_L \sim (\varepsilon/\rho_o)^{-1/3} L^{2/3}$. Andererseits ist diese Struktur in einem ortsfesten Fenster nur für eine Zeit $\bar{t}_L = L/U_o$ sichtbar. Identifiziert man U_o mit einer externen Geschwindigkeitsskala auf einer externen Längenskala L_o wird $t_L/\bar{t}_L \sim (L/L_o)^{1/3} \ll 1$. Damit hängt $\vec{u}(\vec{x}_o - \vec{U}_o\, t) - \vec{v}$ nur noch schwach von der Zeit ab, und $\vec{u}(\vec{x}_o, t) \approx u(\vec{x}_o - \vec{U}_o\, t, 0)$. Aus derartigen Messungen lassen sich verschiedene statistische Größen ermitteln.



6.2 Differentielle Geschwindigkeitsfluktuationen



Als Maß für Geschwindigkeiten auf einer Längenskala L betrachtet man Geschwindigkeitsdifferenzen

$$\vec{U}(\vec{L}) = \vec{u}(\vec{x} + \vec{L}) - \vec{u}(\vec{x}) \tag{6.1}$$

und deren Momente

$$D^{(p)}_{l,t}(L) = \left\langle U_{l,t}(L)^p \right\rangle \tag{6.2}$$

wobei $U_{l,t}(L)$ die longitudinale b.z.w. transversale Komponente von $\vec{U}$ ist.

K41 Skalenverhalten liefert mit (4.20)

$$D^{(p)}_{l,t}(L) = c_{l,t}\,(\varepsilon\, L)^{p/3} \tag{6.3}$$

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_L(U)$ müsste dementsprechend eine L-unabhängige universelle Verteilung

$$P_L(U) = \frac{1}{\overline{U}(L)}\hat{P}\Big(\frac{U}{\overline{U}(L)}\Big) \qquad\qquad \overline{U}(L) = \sqrt{D_2(L)} \tag{6.4}$$

gegeben sein. Die Figur zeigt, dass gemessene Verteilungen $\hat{P}$ sehr wohl von L abhängen. Am Anfang der Energiekaskade auf großer Längenskala $L/\lambda_D \sim 10^5$ ist die Geschwindigkeit fast gaussverteilt, während mit fortschreitender Kaskade, z.B. bei $L/\lambda_D \sim 100$, die Verteilung sehr viel schwächer abfällt. Damit ist aber auch das Skalenverhalten der höheren Momente zu modifizieren. Die hier gezeigte Verteilung der

longitudinalen Geschwindigkeitsdifferenzen U_l zeigt außerdem eine Assymmetrie, während Verteilungen für die transversale Komponente U_t symmetrisch ist.

6.3 Kolmogorov 4/5-Gesetz

Bevor wir uns der Frage der Intermittenz zuwenden, untersuchen wir das Kolmogorov 4/5 Gesetz

$$D_{lll}(L) = -\frac{4}{5}\,\varepsilon\, L + 6\nu D'_{ll}(L) \tag{6.5}$$

wobei $D_{ll}(L) = D_l^{(2)}(L) = \langle U_l(L)^2\rangle$ und $D_{lll}(L) = D_l^{(3)}(L) = \langle U_l(L)^3\rangle$ ist. Für $L \gg \lambda_D$, also im Inertialbereich, ist der letzte Beitrag vernachlässigbar und die L-Abhängigkeit entspricht K41 Skalen. Es gilt aber allgemein und folgt allein aus der Navier-Stokes Gleichung sowie der Forderung nach Isotropie und Homogenität.

Zur Herleitung betrachten wir

$$\underline{\underline{D}}(\vec{L}) = \Big\langle \big(\vec{u}(\vec{L}+\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x})\big) \otimes \big(\vec{u}(\vec{L}+\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x})\big) \Big\rangle = \Big\langle \vec{U}(\vec{L};\vec{x}) \otimes \vec{U}(\vec{L};\vec{x}) \Big\rangle \tag{6.6}$$

Für homogene Turbulenz hängt dieser Ausdruck nicht von $\vec{x}$ ab.
Mit $\vec{v} = \vec{u}(\vec{L}+\vec{x})$ und $\vec{v}' = \vec{u}(\vec{x})$ liefert die Navier-Stokes Gleichung für $\vec{U}$

$$\partial_t \vec{U} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v}'\cdot\vec{\nabla}')\vec{v}' - \nu\big(\Delta\vec{v} - \Delta'\vec{v}'\big) = -\tfrac{1}{\rho_o}\big(\vec{\nabla}P - \vec{\nabla}'P'\big) \tag{6.7}$$

Mit $\vec{\nabla} \to \vec{\nabla}_L$ und $\vec{\nabla}' \to \vec{\nabla}_x - \vec{\nabla}_L$ erhält man

$$\partial_t \vec{U} + (\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_L)\vec{U} + (\vec{v}'\cdot\vec{\nabla}_x)\vec{U} - 2\nu\Big[\nabla_L^2 - \vec{\nabla}_L\cdot\vec{\nabla}_x + \tfrac{1}{2}\nabla_x^2\Big]\vec{U} = -\tfrac{1}{\rho_o}\vec{\nabla}_x\Big[P - P'\Big] \tag{6.8}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned}\partial_t \underline{\underline{D}} + \Big\langle \big(\vec{U}\cdot\vec{\nabla}_L\big)\big(\vec{U}\otimes\vec{U}\big)\Big\rangle - 2\nu\,\Delta_L\,\underline{\underline{D}} + 2\nu\sum_\gamma \Big\langle \big(\nabla_\gamma\vec{v}\big)\otimes\big(\nabla_\gamma\vec{v}\big) + \big(\nabla'_\gamma\vec{v}'\big)\otimes\big(\nabla'_\gamma\vec{v}'\big)\Big\rangle \\ = -\tfrac{1}{\rho_o}\Big\langle \vec{U}\otimes\big(\vec{\nabla}_x(P-P')\big) + \big(\vec{\nabla}_x(P-P')\big)\otimes\vec{U}\Big\rangle\end{aligned} \tag{6.9}$$

wbei benutzt wurde, dass aufgrund der Homogenität $\nabla_x\langle\cdots\rangle = 0$ ist. Der vierte Term auf der linken Seite lässt sich aufgrund von Isotropie, Inkompressibilität und (4.6) umformen

$$\sum_\gamma \Big\langle \big(\nabla_\gamma v_\alpha\big)\big(\nabla_\gamma v_\beta\big)\Big\rangle = \tfrac{1}{3}\sum_{\gamma\delta}\Big\langle \big(\nabla_\gamma v_\delta\big)^2\Big\rangle\,\delta_{\alpha\beta} = \tfrac{4\,\varepsilon}{3\,\nu\,\rho_o}\,\delta_{\alpha\beta} \tag{6.10}$$

Der Term auf der rechten Seite verschwindet, was wie folgt gezeigt wird. Mit (6.1) erhält man Ausdrücke, die nur von einem Ort abhängen

$$\Big\langle \big[v_\alpha(\vec{x})\nabla_\beta + v_\beta(\vec{x})\nabla_\alpha\big]P(\vec{x})\Big\rangle = -\Big\langle P(\vec{x})\big[\nabla_\beta v_\alpha(\vec{x}) + \nabla_\alpha v_\beta(\vec{x})\big]\Big\rangle = -2\Big\langle \eta_{\alpha\beta}(\vec{x})P(\vec{x})\Big\rangle = 0 \tag{6.11}$$

Dabei wurde homogenität, also $\vec{\nabla}\langle\cdots(\vec{x}) = 0\rangle$, und isotropie, also $\big\langle \underline{\underline{Q}}(\vec{x})\big\rangle = \frac{1}{3}\big\langle \mathrm{Tr}\big(\underline{\underline{Q}}(\vec{x})\big)\big\rangle\,\underline{\underline{1}}$, mit $\big\langle \mathrm{Tr}\big(\underline{\underline{\eta}}\big)\big\rangle = 0$ benutzt. Außerdem erhält man Ausdrücke, die von zwei Orten abhängen

$$\Big\langle v_\alpha(\vec{x}+\vec{L})\nabla_\beta P(\vec{x})\Big\rangle = \nabla_\beta^{(L)}\Big\langle v_\alpha(\vec{x}+\vec{L})P(\vec{x})\Big\rangle = \nabla_\beta^{(L)}\Big\langle U_\alpha(\vec{L},\vec{x})P(\vec{x})\Big\rangle \tag{6.12}$$

Der Erwartungswert auf der rechten Seite ist aufgrund der Isotropie von der Form

$$\Big\langle \vec{U}(\vec{L},\vec{x})P(\vec{x})\Big\rangle = \vec{L}\, f(L) \tag{6.13}$$

Bildet man die Divergenz erhält man

$$\vec{\nabla}_L\cdot\Big\langle \vec{U}(\vec{L},\vec{x})P(\vec{x})\Big\rangle = \Big\langle \big(\vec{\nabla}_L\cdot\vec{U}(\vec{L},\vec{x})\big)P(\vec{x})\Big\rangle = 0 = 3\, f(L) + L\, f'(L) \tag{6.14}$$

Dies liefert $f(L) = f_o\, L^{-3}$. Andererseits verschwindet (6.13) für $L\to 0$ und $f_o = f(L) = 0$. Damit ist auch die rechte Seite von (6.9) gleich 0.

Für eine stationäre Strömung erhält man damit

$$\sum_\gamma \nabla_\gamma^{(L)}\, D_{\gamma\alpha\beta}(\vec{L}) - 2\nu\Delta_L D_{\alpha\beta}(\vec{L}) = -\tfrac{16\,\varepsilon}{3\,\rho_o}\,\delta_{\alpha\beta} \tag{6.15}$$

Die Forderung nach Isotropie liefert

$$D_{\alpha\beta}(\vec{L}) = D_{tt}\,\delta_{\alpha\beta} + \big(D_{ll}(L) - D_{tt}(L)\big)\,\frac{L_\alpha L_\beta}{L^2} \tag{6.16}$$

$$D_{\alpha\beta\gamma}(\vec{L}) = D_{ltt}(L)\Big(\frac{L_\alpha}{L}\delta_{\beta\gamma} + \frac{L_\beta}{L}\delta_{\alpha\gamma} + \frac{L_\gamma}{L}\delta_{\alpha\beta}\Big) + \big(D_{lll}(L) - 3D_{ltt}(L)\big)\frac{L_\alpha L_\beta L_\gamma}{L^3} \tag{6.17}$$

Aus der Forderung nach $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{x}) = 0$ erhält man weitere Relationen. Betrachten wir dazu

$$\begin{aligned}\sum_\beta \nabla_\beta^{(L)} D_{\alpha\beta}(\vec{L}) &= \sum_\beta \Big\langle \big(v_\alpha(\vec{L}+\vec{x}) - v_\alpha(\vec{x})\big)\nabla_\beta^{(L)} v_\beta(\vec{L}+\vec{x}) + \big(v_\beta(\vec{L}+\vec{x}) - v_\beta(\vec{x})\big)\nabla_\beta^{(L)} v_\alpha(\vec{L}+\vec{x})\Big\rangle \\ &= \sum_\beta \Big\langle \big(v_\beta(\vec{L}+\vec{x}) - v_\beta(\vec{x})\big)\nabla_\beta^{(x)} v_\alpha(\vec{L}+\vec{x})\Big\rangle = \sum_\beta \Big\langle \nabla_\beta^{(x)}\Big[\big(v_\beta(\vec{L}+\vec{x}) - v_\beta(\vec{x})\big)v_\alpha(\vec{L}+\vec{x})\Big]\Big\rangle \\ &= 0 = D'_{ll}(L) + \frac{2}{L}\big(D_{ll}(L) - D_{tt}(L)\big)\end{aligned} \tag{6.18}$$

Bildet man die Divergenz von (6.15) erhält man mit (6.18)

$$\sum_{\beta\gamma}\nabla_\beta^{(L)}\nabla_\gamma^{(L)}\, D_{\gamma\alpha\beta}(\vec{L}) = 2\nu\sum_\beta \nabla_\beta^{(L)}\Delta_L D_{\alpha\beta}(\vec{L}) = 0 \tag{6.19}$$

und mit (6.17)

$$\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}L} + \frac{3}{L}\Big)\Big(D'_{lll}(L) + \frac{1}{L}\big(D_{lll}(L) - 6D_{ltt}(L)\big)\Big) = 0 \tag{6.20}$$

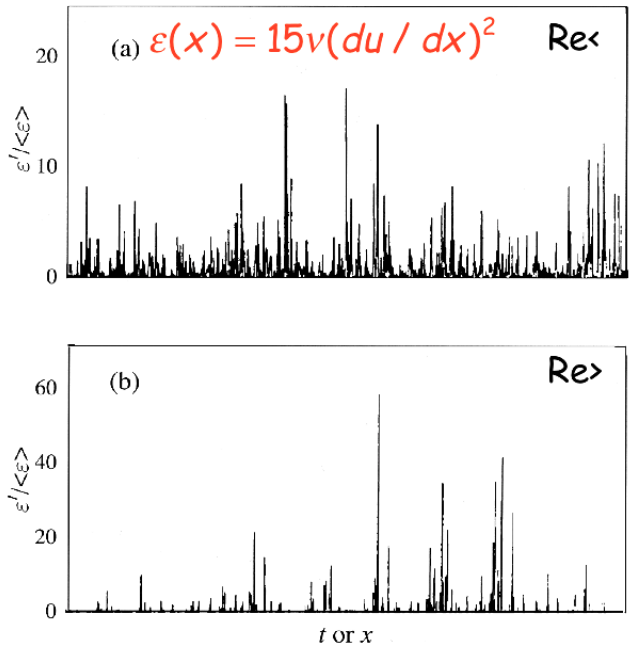
Diese Gleichung wird durch $D'_{lll}(L) + \frac{1}{L}\big(D_{lll}(L) - 6D_{ltt}(L)\big) \sim L^{-3}$ gelöst. Andererseits ist für $L\to 0$ $D_{lll}(L)\to 0$ und $D_{ltt}(L)\to 0$, und man erhält damit

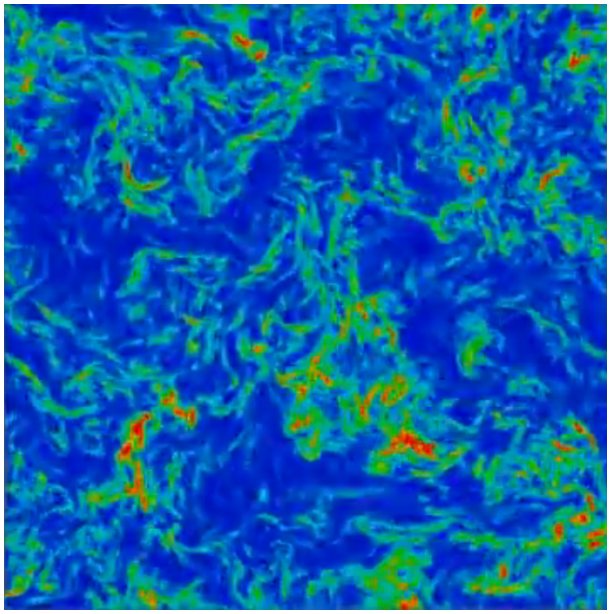
$$D'_{lll}(L) + \frac{1}{L}\big(D_{lll}(L) - 6D_{ltt}(L)\big) = 0 \tag{6.21}$$

Mit diesen Resultaten erhält man schließlich für stationäre Turbulenz im Inertialbereich

$$D_{lll}(L) = 3\, D_{ltt}(L) = -\frac{4\,\varepsilon}{5\,\rho_o}\, L \tag{6.22}$$

6.4 Intermittenz





Eine lokale Energiedissipation, (4.6), gemittelt über ein Volumen der Länge L sei gegeben durch

$$\varepsilon(\vec{x},L) = \tfrac{1}{2}\rho_o\,\nu\,\Big\langle \mathrm{Tr}\big(\underline{\underline{\eta}}(\vec{x})\cdot\underline{\underline{\eta}}(\vec{x})\big)\Big\rangle_L \tag{6.23}$$

Mit fortschreitender Energiekaskade, also kleineren Werten von L zeigt $\varepsilon(\vec{x},L)$ zunehmende Fluktuationen.

Kolmogorov und Obukov (1961) führten entsprechend eine Verteilung der Energiedissipation $P(\varepsilon,L)$ auf einer Skala L ein. Die Verteilung auf Skala L sei durch die Verteilung auf einer größeren Slala, z.B. $2L$ gegeben durch

$$P(\varepsilon,L) = \int \mathrm{d}\varepsilon'\, W(\varepsilon|\varepsilon')\, P(\varepsilon',2L) \tag{6.24}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $W(\varepsilon|\varepsilon')$ sei, unabhängig von L,

$$W(\varepsilon|\varepsilon') = \frac{1}{\varepsilon'}\, f\Big(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\Big) \tag{6.25}$$

Die Erhaltung der Norm liefert

$$\int \mathrm{d}\varepsilon\, P(\varepsilon,L) = \int \mathrm{d}\varepsilon' \int \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon'}\, f\Big(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\Big)\, P(\varepsilon',2L) = \int \mathrm{d}y\, f(y) \int \mathrm{d}\varepsilon'\, P(\varepsilon',2L) = \int \mathrm{d}y\, f(y) = 1 \tag{6.26}$$

Aus der Erhaltung der mittleren Energiedissipation folgt entsprechend

$$\int \mathrm{d}\varepsilon\, \varepsilon\, P(\varepsilon,L) = \overline{\varepsilon} = \int \mathrm{d}y\, y\, f(y) \int \mathrm{d}\varepsilon'\, \varepsilon'\, P(\varepsilon',2L) \qquad \int \mathrm{d}y\, y\, f(y) = 1 \tag{6.27}$$

Höhere Momente der Energiedissipation sind

$$\big\langle \varepsilon^p \big\rangle_L = \int \mathrm{d}\varepsilon\, \varepsilon^p\, P(\varepsilon,L) = \int \mathrm{d}y\, y^p\, f(y)\, \big\langle \varepsilon^p \big\rangle_{2L} \tag{6.28}$$

Für

$$\int \mathrm{d}y\, y^p\, f(y) = 2^{\tau(p)} \tag{6.29}$$

ist damit

$$\left\langle \varepsilon^p \right\rangle_L = 2^{\tau(p)} \left\langle \varepsilon^p \right\rangle_{2L} = \Big(\frac{L}{L_o}\Big)^{-\tau(p)} \overline{\varepsilon}^p \tag{6.30}$$

wenn man davon ausgeht, dass auf der größten Skala L_o keine Fluktuationen auftreten. K41 Skalierung bedeutet $\tau(p) = 0$.

Für die Geschwindigkeit liefert K41 Skalierung $U_L \sim (\varepsilon L)^{1/3}$. Mittelt man nun Potenzen von U_L über die Fluktuationen von ε erhält man

$$\left\langle U_L^p \right\rangle = \Big(\frac{L}{L_o}\Big)^{\zeta(p)} \left(\overline{\varepsilon} L_o\right)^{p/3} \sim \int \mathrm{d}\varepsilon \left(\varepsilon L\right)^{p/3} P(\varepsilon, L) = L^{p/3} \left\langle \varepsilon^{p/3} \right\rangle_L = \Big(\frac{L}{L_o}\Big)^{p/3-\tau(p/3)} \left(\overline{\varepsilon} L_o\right)^{p/3} \tag{6.31}$$

und

$$\zeta(p) = p/3 - \tau(p/3) \tag{6.32}$$

Mit (4.26) wird das Energiespektrum

$$E(K) \sim \rho_o^{1/3}\, \overline{\varepsilon}^{2/3}\, K_o^{-5/3} \Big(\frac{K}{K_o}\Big)^{-\alpha} \tag{6.33}$$

mit dem zugehörigen Exponenten

$$\alpha = 5/3 - \tau(2/3) \tag{6.34}$$

Von Kolmogorov und Obukov wurde für $f(y)$ eine Lognormale Verteilung vorgeschlagen. Das bedeutet, dass $x = -\frac{\ln(y)}{\ln(2)}$ Gaussverteilt ist. Damit ist

$$f(y) = \frac{2^x}{\sqrt{2\pi\sigma}\, \ln(2)}\, \mathrm{e}^{(x-\overline{x})^2/2\sigma^2} \tag{6.35}$$

und mit (6.29) und $\mu = \tau(2) = 2\sigma$ findet man

$$\tau(p) = \tfrac{1}{2}\mu\, p\, (p-1) \qquad \zeta(p) = \tfrac{1}{3}\, p - \tfrac{1}{18}\, \mu\, p\, (p-3) \qquad \alpha = 5/3 + \mu/9 \tag{6.36}$$

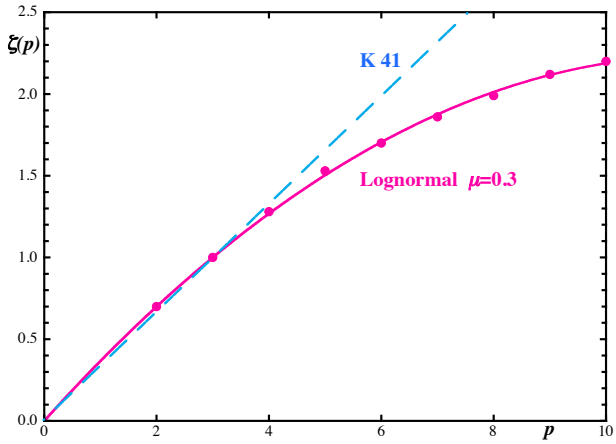
Für $p = 3$ ist $\zeta(3) = 1$ im Einklang mit dem Kolmogorov 4/5 Gesetz (6.5).

Alternativ wurde ein Prozess diskutiert, bei dem die Energie in jedem Schritt nur auf einen Bruchteil β des Volumens verteilt wird, also

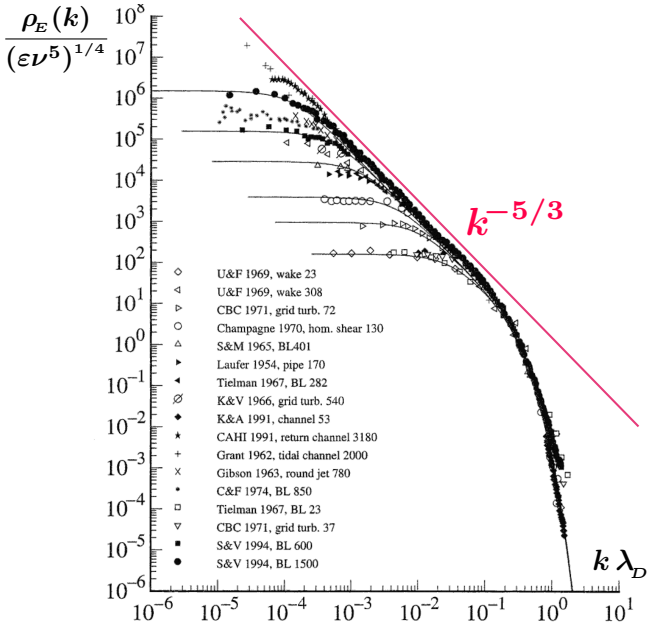
$$f(y) = (1-\beta)\, \delta(y) + \beta \delta(y - 1/\beta) \tag{6.37}$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} \tau(p) &= \tfrac{\ln(1/\beta)}{\ln(2)}\, (p-1) = (p-1)\, \mu & \mu = \tau(2) &= \tfrac{\ln(1/\beta)}{\ln(2)} \\ \zeta(p) &= \tfrac{1}{3} p - \tfrac{1}{3}\mu\, (p-3) & \alpha &= 5/3 + \tfrac{1}{3}\mu \end{aligned} \tag{6.38}$$



Experimentelle Daten für $\zeta(p)$ werden für nicht zu große p gut durch die Lognormalverteilung mit $\mu = 0.3$ reproduziert. Daraus resultiert $\alpha = 5/3 + 0.033$. Die Korrektur zum K41-Verhalten des Energiespektrums ist damit nicht signifikant.



Normiertes Energiespektrum

13.12.2010

7 Feldtheoretische Ansätze

7.1 Klassische Nichtgleichgewichtsdynamik

Eine feldtheoretische Formulierung klassischer dynamischer Systeme wurde von Wyld (1961) im Zusammenhang mit der Theorie voll ausgebildeter Turbulenz, und in allgemeinerer und transparenterer Form von Martin, Siggia und Rose (1973) entwickelt.

Bevor wir uns der Turbulenz zuwenden, betrachten wir einen einzigen Freiheitsgrad $\varphi(t)$, der einer nichtlinearen Langevin-Gleichung genügt:

$$\partial_t\varphi(t) = -\eta_o\varphi(t^-) + K\big(\varphi(t^-)\big) + f(t^-) \tag{7.1}$$

wobei die Wirkung der Kräfte retardiert sei (Ito Kalkül).

Wir betrachten ein Ensemble von Gaussverteilten äußeren Kräften mit

$$\Big\langle \big(f(t) - \langle f(t)\rangle\big)\,\big(f(t') - \langle f(t')\rangle\big)\Big\rangle = \gamma_o(t,t') \tag{7.2}$$

Für spezielle Anwendungen, z.B. Brown'sche Bewegung, betrachtet man $\gamma_o(t,t') \sim \delta(t-t')$, im Zusammenhang mit einer statistischen Theorie der Turbulenz werden wir langzeitig korrelierte Kräfte betrachten.

Es sei $\mathcal{O}\big(\{\varphi\}\big)$ eine Observable, die möglicherweise von $\varphi(t)$ zu verschiedenen Zeiten abhängt. Wir interessieren uns für Erwartungswerte $\big\langle\mathcal{O}\big(\{\varphi\}\big)\big\rangle_f$, wobei $\varphi(t)$ Lösung von (7.1) mit vorgegebener Anfangsbedingung $\varphi(t_o)$ sei. Die Mittelung bezieht sich auf Kräfte $f(t)$ und Anfangsbedingung $\varphi(t_o)$. Für stationäre Zustände betrachtet man $t_o \to -\infty$, womit die Abhängigkeit von Anfangsbedingungen entfällt.

Ein Erwartungswert lässt sich als Pfadintegral darstellen

$$\big\langle\mathcal{O}\big(\{\varphi\}\big)\big\rangle = \Big\langle \int \mathcal{D}\{\varphi,\tilde\varphi\}\,\mathcal{O}\big(\{\varphi\}\big)\,\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}t\{-(\partial_t+\eta_o)\varphi(t)+K(\varphi(t^-))+f(t^-)\}\tilde\varphi(t)}\Big\rangle_f \tag{7.3}$$

wobei über reelle Pfade $\varphi(t)$ und imaginäre Pfade $\tilde\varphi(t)$ integriert wird. Letztere entspricht einem Produkt von δ-Funktionen, das dafür sorgt, dass (7.1) zu jeder Zeit erfüllt ist.

Der Erwartungswert über die gaussverteilten fluktuierenden Anteile der Kräfte kann jetzt durchgeführt werden und liefert

$$\big\langle \mathcal{O}\big(\{\varphi\}\big)\big\rangle = \int \mathcal{D}\{\varphi,\tilde\varphi\}\, \mathcal{O}\big(\{\varphi\}\big)\, \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}t\{-(\partial_t+\eta_o)\varphi(t)+K(\varphi(t^-))+f(t^-)\}\tilde\varphi(t)+\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\tilde\varphi(t)\gamma_o(t,t')\tilde\varphi(t')} \tag{7.4}$$

Neben Erwartungswerten ist man auch an deren Änderungen bei Änderung der äußeren Kraft interessiert, z.B. einer linearen Antwortfunktion $\delta\big\langle \mathcal{O}\big(\{\varphi\}\big)\big\rangle_f /\delta f(t)$. Diese lässt sich als verallgemeinerter Erwartungswert

$$\delta\big\langle \mathcal{O}\big(\{\varphi\}\big)\big\rangle_f /\delta f(t) = \big\langle \mathcal{O}\big(\{\varphi\}\big)\, \tilde\varphi(t)\big\rangle_f \tag{7.5}$$

schreiben. Damit haben auch die Hilfsvariablen $\tilde\varphi$ eine physikalische Bedeutung, und wir können im Folgenden $f(t)=0$ setzen.

Kausalität fordert $\delta\big\langle \mathcal{O}\big(\{\varphi\}\big)\big\rangle_f /\delta f(t) = \big\langle \mathcal{O}\big(\{\varphi\}\big)\tilde\varphi(t)\big\rangle = 0$ falls $\mathcal{O}\big(\{\varphi\}\big)$ keine Observable $\varphi(t')$ zu Zeiten $t'\geq t$ enthält. Integration über über $\varphi(s)$ b.z.w $\partial_s\varphi(s)$ für $s\geq t$ liefert $\tilde\varphi(s)\equiv 0$ für $s\geq t$, im Einklang mit der Forderung nach Kausalität, die hier formal eine Konsequenz des Ito-Kalküls ist.

Ausgehend von der Pfadintegraldarstellung kann eine Skelettgraphenentwicklung hergeleitet werden. Dazu schreiben wir

$$\Big\langle \mathcal{O}\big(\{\varphi,\tilde\varphi\}\big)\Big\rangle = \int \mathcal{D}\{\varphi,\tilde\varphi\}\, \mathcal{O}\big(\{\varphi,\tilde\varphi\}\big)\, \mathrm{e}^{\mathcal{W}_o+\mathcal{W}'} \tag{7.6}$$

mit

$$\mathcal{W}_o = -\int \mathrm{d}t\, \dot\varphi(t)\, \tilde\varphi(t) - \int \mathrm{d}t \int^t \mathrm{d}t'\, \tilde\varphi(t)\, \eta(t,t')\, \varphi(t') + \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}t'\, \tilde\varphi(t)\, \gamma(t,t')\, \tilde\varphi(t') \tag{7.7}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{W}' = &\int \mathrm{d}t\, K\big(\varphi(t)\big)\, \tilde\varphi(t) - \int \mathrm{d}t \int^t \mathrm{d}t'\, \tilde\varphi(t)\, \big(\eta_o\delta(t-t') - \eta(t,t')\big)\, \varphi(t') \\ &+ \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}t'\, \tilde\varphi(t)\, \big(\gamma_o(t,t') - \gamma(t,t')\big)\, \tilde\varphi(t')\end{aligned} \tag{7.8}$$

Ziel ist es, $\eta(t,t')$ und $\gamma(t,t')$ so zu bestimmen, dass von $\mathcal{W}'$ generierte Beiträge näherungsweise verschwinden.

Korrelations- und Responsefunktion für das ungestörte Problem sind $C(t,t') = \langle\varphi(t)\,\varphi(t')\rangle_o$ und $G(t,t') = \langle\varphi(t)\,\tilde\varphi(t')\rangle_o$. Bewegungsgleichungen für diese Größen erhält man aus der allgemeinen Identität

$$\int \mathcal{D}\{\varphi,\tilde\varphi\}\, \frac{\delta}{\delta\tilde\varphi(t)}\, \mathcal{O}\big(\{\varphi,\tilde\varphi\}\big)\, \mathrm{e}^{\mathcal{W}} = 0 \tag{7.9}$$

Für $\mathcal{W}\to\mathcal{W}_o$ und $\mathcal{O}\big(\{\varphi,\tilde\varphi\}\big) = \tilde\varphi(t')$ ergibt sich

$$\partial_t G(t,t') = \delta(t-t') - \int_{t'}^t \mathrm{d}s\, \eta(t,s)\, G(s,t') \tag{7.10}$$

mit $G(t,t')=0$ für $t<t'$. Für $\mathcal{O}\big(\{\varphi,\tilde\varphi\}\big) = \varphi(t')$ erhält man

$$\partial_t C(t,t') = -\int^t \mathrm{d}s\, \eta(t,s)\, C(s,t') + \int^{t'} \mathrm{d}s\, \gamma(t,s)\, G(t',s) \tag{7.11}$$

oder

$$C(t,t') = \int \mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'\, G(t,s)\,\gamma(s,s')\,G(t',s') \tag{7.12}$$

Zur Bestimmung von $\gamma(t,t')$ untersuchen wir

$$\int \mathcal{D}\{\varphi,\tilde\varphi\}\,\mathrm{e}^{\mathcal{W}_o}\,\frac{\delta^2}{\delta\tilde\varphi(t)\delta\tilde\varphi(t')}\,\mathrm{e}^{\mathcal{W}'} = \gamma_o(t,t') - \gamma(t,t') + \Big\langle K\big(\varphi(t)\big)\,K\big(\varphi(t')\big)\Big\rangle \stackrel{!}{=} 0 \tag{7.13}$$

und fordern, dass dieser Ausdruck verschwindet. Näherungsweise werten wir den Erwartungswert mit $\mathcal{W} = \mathcal{W}_o$ aus. Damit ist

$$\gamma(t,t') \approx \gamma_o(t,t') + \Big\langle K\big(\varphi(t)\big)\,K\big(\varphi(t')\big)\Big\rangle_o \tag{7.14}$$

Entsprechend erhält man $\eta(t,t')$ mit

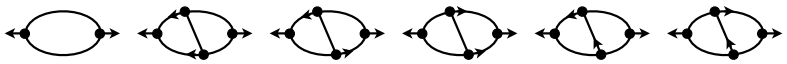
$$\int \mathcal{D}\{\varphi,\tilde\varphi\}\,\mathrm{e}^{\mathcal{W}_o}\,\frac{\delta^2}{\delta\tilde\varphi(t)\delta\varphi(t')}\,\mathrm{e}^{\mathcal{W}'} \approx \eta(t,t') - \eta_o\delta(t-t') - \Big\langle K\big(\varphi(t)\big)\,K'\big(\varphi(t')\big)\tilde\varphi(t')\Big\rangle_o \stackrel{!}{=} 0 \tag{7.15}$$

Speziell für $K\big(\varphi(t)\big) = \frac{1}{2}g\,\varphi(t)^2$ erhält man

$$\eta(t,t') = \eta_o\delta(t-t') - g^2 C(t,t')\,G(t,t') \qquad\qquad \gamma(t,t') = \gamma_o(t,t') + \tfrac{1}{2}g^2 C(t,t')^2 \tag{7.16}$$

Damit bilden (7.10), (7.11) und (7.16) ein geschlossenen Gleichungssytem für Korrelations- und Responsefunktionen.

Beiträge höherer Ordnung zu $\eta(t,t')$ und $\gamma(t,t')$ können durch Skelettdiagramme dargestellt werden. Dabei wird $K(\varphi)$ durch , $C(t,t')$ durch und $G(t,t')$ durch dargestellt. Die Diagramme bis zur Ordnung g^4 sind in der folgendem Figur gezeigt.

$\boldsymbol{\gamma(t,t')}$ 

$\boldsymbol{\eta(t,t')}$

24.1.2011

7.2 "Direct Interaction Approximation" (DIA, Kraichnan 1961)

Die Navier-Stokes-Gleichung in Fourierdarstellung, (4.12), ist

$$\partial_t u_\alpha(\vec k,t) + i\sum_{\beta\gamma}\int\frac{\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\delta(\vec k-\vec p-\vec q)\,V_{\alpha\beta\gamma}(\vec k)\,u_\beta(\vec p,t)\,u_\gamma(\vec q,t) + \nu\,k^2\,u_\alpha(\vec k,t)\Theta_{\alpha\beta}(\vec k)$$
$$= \sum_\beta \Theta_{\alpha\beta}(\vec k)\,f_\beta(\vec k,t) \tag{7.17}$$

mit

$$V_{\alpha\beta\gamma}(\vec k) = -V_{\alpha\beta\gamma}(-\vec k) = \text{ } = \Theta_{\alpha\beta}(\vec k)\,k_\gamma \tag{7.18}$$

In einer statistischen Theorie der isotropen voll ausgebildeten Turbulenz betrachtet man ein Ensemble gaussverteilter äußerer Kräfte mit

$$\Big\langle f_\alpha(\vec k)\,f_\beta(-\vec k)\Big\rangle = \Theta_{\alpha\beta}(\vec k)\,\gamma_o(k,t) \tag{7.19}$$

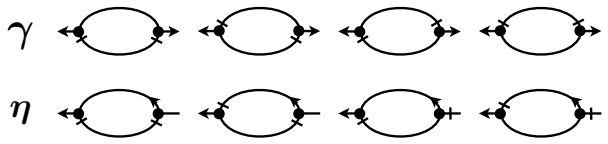
Sie bestimmen die größte Längen- und Zeitskala. Entsprechend verschwindet $\gamma_o(k,t)$ für $k > K_o$ und ist für $t < t_o(K_o)$ konstant.

Die Überlegungen des vorhergehenden Abschnitts lassen sich aufgrund der formalen Ähnlichkeit von (7.17) mit (7.1) unmittelbar übertragen. Für stationäre, isotrope und homogene Turbulenz sind Korrelations- und Responsefunktionen durch skalare Funktionen gegeben, die nur von $k = |\vec{k}|$ und $t - t'$ abhängen:

$$C_{\alpha\beta}(\vec{k},t,t') = \Theta_{\alpha\beta}(\vec{k})\, C(k,t-t') \qquad\qquad G_{\alpha\beta}(\vec{k},t,t') = \Theta_{\alpha\beta}(\vec{k})\, G(k,t-t') \tag{7.20}$$

Entsprechendes gilt für die Selbstenergien $\gamma(k,t)$ und $\eta(k,t)$.

In der DIA wird jeweils nur das erste Diagramm von $\gamma(k,t)$ und $\eta(k,t)$ berücksichtigt. Da der Vertex nicht symmetrisch ist, erhält man die hier gezeigten Diagramme. Damit wird



$$\begin{aligned}\gamma(k,t) &= \gamma_o(k,t) + \tfrac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\beta'\gamma\gamma'}\int\frac{\mathrm{d}^3p\;\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\,\delta(\vec{k}+\vec{p}+\vec{q})\,\Theta_{\beta\beta'}(\vec{p})\,C(p,t)\,\Theta_{\gamma\gamma'}(\vec{q})C(q,t)\\ &\qquad\times\Big[\Theta_{\alpha\beta}(\vec{k})\,k_\gamma + \Theta_{\alpha\gamma}(\vec{k})\,k_\beta\Big]\Big[\Theta_{\alpha\beta'}(\vec{k})\,k_{\gamma'} + \Theta_{\alpha\gamma'}(\vec{k})\,k_{\beta'}\Big]\\ &= \gamma_o(k,t) + k^2\int_\Delta \mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,F(k,p,q)\,a(k,p,q)\,C(p,t)\,C(q,t)\end{aligned} \tag{7.21}$$

Dabei kommt der Faktor

$$F(k,p,q) = \frac{p\,q}{4\pi^2\,k} \tag{7.22}$$

von der Umwandlung der Integration über $\vec{p}$ und $\vec{q}$ in ein Integral über Dreiecke mit Seiten k, p und q. Der Faktor

$$\begin{aligned}a(k,p,q) &= \tfrac{1}{2k^2}\Big[\mathrm{Tr}\big(\underline{\underline{\Theta}}(\vec{p})\cdot\underline{\underline{\Theta}}(\vec{k})\big)\big(\vec{k}\cdot\underline{\underline{\Theta}}(\vec{q})\cdot\vec{k}\big) + \big(\vec{k}\cdot\underline{\underline{\Theta}}(\vec{p})\cdot\underline{\underline{\Theta}}(\vec{k})\cdot\underline{\underline{\Theta}}(\vec{q})\cdot\vec{k}\big)\\ &\qquad + \big(\vec{k}\cdot\underline{\underline{\Theta}}(\vec{q})\cdot\underline{\underline{\Theta}}(\vec{k})\cdot\underline{\underline{\Theta}}(\vec{p})\cdot\vec{k}\big) + \mathrm{Tr}\big(\underline{\underline{\Theta}}(\vec{q})\cdot\underline{\underline{\Theta}}(\vec{k})\big)\big(\vec{k}\cdot\underline{\underline{\Theta}}(\vec{p})\cdot\vec{k}\big)\Big]\\ &= \frac{S^2}{8k^4p^2q^2}\Big[k^2(p^2+q^2) + \big(p^2-q^2\big)^2\Big]\end{aligned} \tag{7.23}$$

berücksichtigt die Summationen über die transversalen Projektoren $\Theta_{\dots}(\cdots)$, und

$$S = \sqrt{2k^2p^2 + 2k^2q^2 + 2p^2q^2 - k^4 - p^4 - q^4} \tag{7.24}$$

ist die Fläche des Dreiecks mit Kanten k, p und q.

Eine entsprechende Rechnung liefert

$$\eta(k,t) = \nu k^2\delta(t-t') + k^2\int_\Delta \mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,F(k,p,q)\,b(k,p,q)\,G(p,t)\,C(q,t) \tag{7.25}$$

mit

$$b(k,p,q) = \frac{S^2}{4k^4p^2q^2}\Big[2k^2p^2 - q^2(k^2+p^2-q^2)\Big] \tag{7.26}$$

Es gelten folgende Beziehungen:

$$a(k,p,q) = a(k,q,p) \qquad k^2 b(k,p,q) = p^2 b(p,k,q) \qquad a(k,p,q) = \tfrac{1}{2}\big(b(k,p,q) + b(k,q,p)\big) \tag{7.27}$$

Die Bewegungsgleichungen sind entsprechend (7.10) und (7.12)

$$\partial_t G(k,t) = \delta(t) - \int_0^t \mathrm{d}s\, \eta(k,t-s)\, G(k,s) \tag{7.28}$$

und

$$\partial_t C(k,t) = -\int_0 \mathrm{d}s\, \eta(k,s)\, C(k,t+s) + \int \mathrm{d}s\, \gamma(k,t+s)\, G(k,s) \tag{7.29}$$

Man erhält damit ein geschlossenes Gleichungssystem. Es kann z.B. numerisch, allerdings mit gewissem Aufwand, gelöst werden.

Die Energiedichte (4.8) ist

$$\rho_E = \tfrac{1}{2}\rho_o \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \left\langle \vec{u}(\vec{k},t)\cdot\vec{u}(-\vec{k},t)\right\rangle = \tfrac{1}{2}\rho_o \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \sum_\alpha C_{\alpha\alpha}(\vec{k},t,t) = \rho_o \int \frac{k^2\,\mathrm{d}k}{2\pi^2}\, C(k,t,t) \tag{7.30}$$

Die Transferrate von Energie von kleinen zu großen Wellenvektoren $\Pi(K)$, (7.27), ist

$$\begin{aligned}\Pi(K) &= \rho_o \int_0^K \frac{k^2\,\mathrm{d}k}{4\pi^2} \left\langle \partial_t \vec{u}(\vec{K},t)\cdot\vec{u}(-\vec{k},0)\right\rangle\Big|_{t=0} = \rho_o \int_0^K \frac{k^2\,\mathrm{d}k}{2\pi^2}\, \partial_t C(k,t)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\rho_o}{16\pi^4} \int \mathrm{d}t \int_0^K \mathrm{d}k \int_K^\infty \mathrm{d}p \int_{p-k}^{p+k} \mathrm{d}q\, k^3\, p\, q\, b(k,p,q)\, C(q,t) \Big\{ G(k,t)\, C(p,t) - C(k,t)\, G(p,t)\Big\}\end{aligned} \tag{7.31}$$

wobei benutzt wurde, dass aufgrund von (7.27) der Integrationsbeitrag für $p < K$ verschwindet. Das entsprechende Integral über $k > K$ liefert einen Beitrag $-\Pi(K)$. In der DIA ist damit Energieerhaltung gewährleistet.

7.3 Skalenverhalten und Infrarot Divergenzen in der DIA

Durch die Korrelation der fluktuierenden Kräfte $\gamma_o(k,t)$ ist eine größte Längenskala b.z.w. ein kleinster Wellenvektor K_o gegeben. Im folgenden wollen wir die Abhängigkeit von K_o untersuchen. Eine wesentliche Annahme in der Kolmogorov 41 Theorie war eine Unabhängigkeit von K_o und eine konstante Transferrate $\Pi(K) = \varepsilon$ im Inertialbereich $k \gg K_o$.

Wir untersuchen ein etwas allgemeineres Skalenverhalten mit einer Zeitskala

$$\tau(k) \sim k^{-2/3}\, (k/K_o)^{-\delta} \tag{7.32}$$

und dem Ansatz

$$C(k,t) \sim k^{-11/3} (k/K_o)^\zeta\, \hat{C}\big(t/\tau(k)\big) \qquad\qquad G(k,t) \sim \hat{G}\big(t/\tau(k)\big) \tag{7.33}$$

wobei $\delta = \zeta = 0$ dem K 41 Skalenverhalten entspricht.

Das Energiespektrum (4.9) wird damit

$$E(k) \sim k^{-5/3} (k/K_o)^\zeta \tag{7.34}$$

Unter der Annahme, dass die Hauptbeiträge in den Integralen in (7.21), (7.25) und (7.31) von $p \sim q \sim k$ stammen, erhält man folgende Abschätzungen

$$\gamma(k,\tau(k)) \sim k^{-7/3}(k/K_o)^{2\zeta} \qquad \eta(k,\tau(k)) \sim k^{4/3}(k/K_o)^{\zeta} \qquad \Pi(k) \sim (k/K_o)^{2\zeta-\delta} \tag{7.35}$$

Zur Abschätzung der Abhängigkeit von $K_o \ll k$ untersuchen wir die Beiträge von $p-k \sim q \sim K_o$ beziehungsweise $q-k \sim p \sim K_o$. Mit (7.26) findet man im ersten Fall $b(k,k,q) \to 2$ für $q \to 0$, während $b(k,p,k) \to p^2$ für $p \to 0$. Das führende Verhalten ist also durch $q \sim K_o$ gegeben. Bei der Abschätzung von $\Pi(K)$ ist zu berücksichtigen, dass sich die beiden Beiträge in (7.31) im Grenzfall $q \to 0$ und $p \to k$ kompensieren. Man erhält schließlich

$$\gamma(k,\tau(k)) \sim k^{-7/3}(k/K_o)^{2/3+\zeta} \qquad \eta(k,\tau(k)) \sim k^{4/3}(k/K_o)^{2/3} \qquad \Pi(k) \sim (k/K_o)^{-1/3+\zeta-\delta} \tag{7.36}$$

Eine Abschätzung der Zeitskala erhält man aus (7.28), und mit (7.32) ist

$$\frac{1}{\tau(k)} \sim \tau(k)\,\eta\big(k,\tau(k)\big) \qquad \eta\big(k,\tau(k)\big) \sim k^{4/3}\,(k/K_o)^{2\delta} \tag{7.37}$$

Die Existenz einer Energiekaskade erfordert $\Pi(K) = \varepsilon$, unabhängig von K, im Inertialbereich. Dies bedeutet $\zeta = \frac{1}{2}\delta$. Für $\delta > -2/3$ tragen damit Werte von $q \sim K_o$ nicht zum Energietransfer bei, und die Kaskade ist lokal. Für $\zeta < 2/3$ und folglich $\delta < 4/3$ wird η und γ durch Beiträge von $q \sim K_o$ dominiert.

Der Vergleich von (7.36) mit (7.37) liefert $\delta = 1/3$ und $\zeta = 1/6$. Das Energiespektrum $E(k) \sim k^{-3/2}$ weich von dem Kolmororovspektrum, allerdings nur wenig, ab. Bemerkenswert ist, dass die Energietransferrate nicht durch K_o bestimmt ist, die typische Zeitskala $\tau(k)$ jedoch schon.

30.1.2011

7.4 Advektion, stochastische Galilei-Transformation

Die Navier-Stokes Gleichung ist -invariant. Betrachten wir ein Laborsystem mit Koordinaten $\vec{x}$ und Geschwindigkeiten $\vec{u}(\vec{x},t)$, sowie ein mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegtes System mit Koordinaten $\hat{\vec{x}}$ und Geschwindigkeiten $\hat{\vec{u}}(\hat{\vec{x}},t)$. Dann gilt

$$\vec{x} = \hat{\vec{x}} + \vec{v}t \qquad \vec{u}(\vec{x},t) = \hat{\vec{u}}(\hat{\vec{x}},t) + \vec{v} \tag{7.38}$$

und für die Fourier-transformierten Geschwindigkeiten

$$\vec{u}(\vec{k},t) = \mathrm{e}^{-i\vec{k}\vec{v}\,t}\hat{\vec{u}}(\vec{k},t) + \vec{v}\,\delta(\vec{k}) \tag{7.39}$$

Die Zeitableitung in der Navier-Stokes Gleichung transformiert sich entsprechend

$$\partial_t\vec{u}(\vec{k},t) \to \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{v}\,t}\Big[-i\big(\vec{k}\cdot\vec{v}\big) + \partial_t\Big]\hat{\vec{u}}(\vec{k},t) \tag{7.40}$$

und der Advektionsterm

$$\begin{aligned} &i\int \frac{\mathrm{d}^2p\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\delta(\vec{k}+\vec{p}+\vec{q})\big(\vec{k}\cdot\vec{u}(\vec{q},t)\big)\underline{\underline{\Theta}}(\vec{k})\cdot\vec{u}(\vec{p},t) \\ &\quad\to \mathrm{e}^{-i\vec{k}\vec{v}\,t}\Big[i\int\frac{\mathrm{d}^2p\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\delta(\vec{k}+\vec{p}+\vec{q})\big(\vec{k}\cdot\hat{\vec{u}}(\vec{q},t)\big)\underline{\underline{\Theta}}(\vec{k})\cdot\hat{\vec{u}}(\vec{p},t) + i\big(\vec{k}\cdot\vec{v}\big)\hat{\vec{u}}(\vec{k},t)\Big] \end{aligned} \tag{7.41}$$

wobei sich die Terme $\sim\big(\vec{k}\cdot\vec{v}\big)$ gegenseitig wegheben, womit die Galilei-Invarianz gezeigt ist.

Die Transformation der Korrelations- und Responsefunktionen ist

$$\underline{\underline{C}}(\vec{k},t) = \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{v}\,t}\,\underline{\underline{\hat{C}}}(\vec{k},t) + \vec{v}\otimes\vec{v}\,\delta(\vec{k})) \qquad \underline{\underline{G}}(\vec{k},t) = \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{v}\,t}\,\underline{\underline{\hat{G}}}(\vec{k},t) \tag{7.42}$$

Nehmen wir an, dass im bewegten System eine charakteristische Zeitskala $\hat{\tau}(k)$ existiert. Im Laborsystem existiert dann eine weitere Zeitskala $\tau_A(k) = 1/(v\,k)$, die möglicherweise kürzer ist, also $\tau_A(k) \ll \hat{\tau}(k)$. In diesem Fall wird die Dynamik im Laborsystem im wesentlichen durch Advektion, und nicht durch die intrinsische Dynamik im bewegten System, bestimmt.

Speziell sei die Bewegung des bewegten System durch die großräumigen Strömung bewirkt. Diese sei durch die Fourier-Komponenten mit $k < K_1$ definiert. Bei der Transformation von bewegtem System zum Laborsystem ist damit über die großräumige Bewegung zu mitteln. Unter Vernachlässigung der Zeit- und Wellenzahlabhängigkeit ist damit über eine Verteilung $P(v)$ zu mitteln, die näherungsweise als Gauss-Verteilung angenommen werde. Damit wird (für $k \neq 0$)

$$\underline{\underline{C}}(\vec{k},t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}k^2\langle v^2\rangle t^2}\,\underline{\underline{\hat{C}}}(\vec{k},t) \qquad \underline{\underline{G}}(\vec{k},t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}k^2\langle v^2\rangle t^2}\,\underline{\underline{\hat{G}}}(\vec{k},t) \tag{7.43}$$

mit

$$\langle v^2\rangle = \int_{K_o}^{K_1} \frac{k^2\,\mathrm{d}k}{2\pi^2} C(k,0) \tag{7.44}$$

Falls die Korrelations- und Responsefunktionen im bewegten System in DIA berechnet, erhält man das vorher diskutierte Skalenverhalten mit Abschneidewellenzahl K_1. Wählt man $K_1 = \lambda k \gg K_o$ erhält man für $\hat{C}(k,t)$ und $\hat{G}(k,t)$ Kolmogorov-Skalierung. Für gleichzeitige Erwartungswerte, z.B für das Energiespektrum, hat die Transformation auf das Laborsystem keinen Einfluss. Man erhält also das Kolmogorov-Spektrum $E(k) \sim k^{-5/3}$. Die Zeitskala für Advektion wird damit $\tau_A(k) \sim k^{-2/3}\big(k/K_o\big)^{-1/3}$. Gegenüber der ursprünglichen DIA ändert sich also das Spektrum, die Zeitskala bleibt jedoch unverändert, also $\zeta = 0$ und $\delta = 1/3$. Dies zeigt aber auch, dass die Galilei-Invarianz in der DIA gebrochen ist.

Die hier vorgeschlagene Prozedur ist nur bedingt brauchbar, vor allem, weil die Ergebnisse stark von λ abhängen, und der Übergangsbereich von kleinen zu größeren Wellenvektoren nicht adäquat behandelt wird. Es zeigt aber auch, dass allgemein eine auf der Euler'schen Beschreibung basierende Dynamische Theorie, durch Advektionseffekte korrumpiert wird.

7.5 Lagrange'sche Theorien

Die grundlegende dynamische Gleichung, die Navier-Stokes-Gleichung ist in Euler'scher Beschreibung formuliert. Für eine Theorie, die nicht durch Advektioneffekte korrumpiert ist, scheint eine Lagrange'sche Beschreibung angebracht.

Als Ausweg wurde von Kraichnan, 1966, eine Formulierung vorgeschlagen, die auf verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\vec{u}(\vec{x},t|s)$ beruht, die als Spezialfall sowohl die Euler'sche wie auch die Lagrange'sche Beschreibung enthalten.

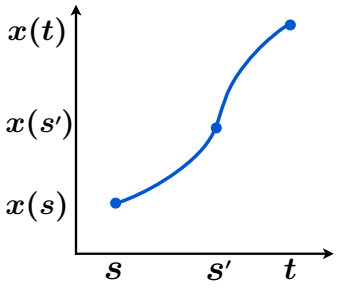
In der Lagrange'schen Beschreibung ist $\vec{x}(\vec{x}_0,t)$ die Position eines Flüssigkeitsteilchens, welches sich zur Zeit 0 am Ort $\vec{x}_o$ befunden hat. Die Lagrange'sche Geschwindigkeit ist $\vec{u}_L(\vec{x}_o,t) = \partial_t\vec{x}(\vec{x}_0,t)$. Für die Euler'sche Geschwindigkeit gilt $\vec{u}_E\big(\vec{x}(\vec{x}_o,t),t\big) = \vec{u}_L(\vec{x}_o,t)$.

Kraichnan führte eine verallgemeinerte Geschwindigkeit $u_K(\vec{x}_o,s|t)$ ein, in der als Koordinate der Ort $\vec{x}(\vec{x}_o,s|t)$ eines Teilchens zu einer Zeit t benutzt wird, welches sich zur Zeit s am Ort $\vec{x}_o$ befunden hat. Sie ist definiert als

$$u_K(\vec{x}_o,s|t) = u_E\big(\vec{x}(\vec{x}_o,s|t),t\big) \tag{7.45}$$

mit

$$\vec{x}(\vec{x}_o,t|t)=\vec{x}_o \qquad u_K(\vec{x},t|t)=u_E\big(\vec{x},t\big) \tag{7.46}$$



und

$$\partial_t\vec{x}(\vec{x}_o,s|t)=u_E\big(\vec{x}(\vec{x}_o,s,t),t\big)=\vec{u}_K(\vec{x}_o,s|t) \tag{7.47}$$

Es gilt

$$\vec{x}(\vec{x}_o,s|t)=\vec{x}(\vec{x}',s'|t)=\vec{x}\big(\vec{x}(\vec{x}_o,s|s'),s'\big|t\big) \tag{7.48}$$

Differentiaion nach s' liefert mit $s'\to s$

$$\partial_s\vec{x}(\vec{x}_o,s|t)=-\big(\vec{u}_E(\vec{x}_o,s)\cdot\vec{\nabla}_o\big)\,\vec{x}(\vec{x}_o,s|t) \tag{7.49}$$

und mit (7.47)

$$\partial_s\vec{u}_K(\vec{x}_o,s|t)=-\big(\vec{u}_K(\vec{x}_o,s|s)\cdot\vec{\nabla}_o\big)\,\vec{u}_K(\vec{x}_o,s|t) \tag{7.50}$$

Dieser Ausdruck erinnert an den Advektionsterm in der Navier-Stokes-Gleichung.

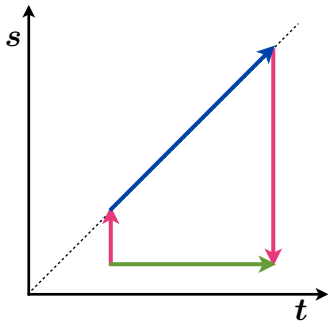
Man definiert verallgemeinerte Korrelationsfunktionen

$$\underline{\underline{C}}_K(\vec{x},s|t\,;\vec{x}',s'|t')=\Big\langle\vec{u}_K(\vec{x},s|t)\otimes\vec{u}_K(\vec{x}',s'|t')\Big\rangle \tag{7.51}$$

und entsprechende Responsefunktionen. Spezialfälle sind

$$\underline{\underline{C}}_K(\vec{x},t|t\,;\vec{x}',t'|t')=\underline{\underline{C}}_E(\vec{x},t;\vec{x}',t') \qquad \underline{\underline{C}}_K(\vec{x},s|t\,;\vec{x}',s|t')=\underline{\underline{C}}_L(\vec{x},t;\vec{x}',t';s) \tag{7.52}$$

Interessiert ist man an der Lagrange'schen Korrelationsfunktion $\underline{\underline{C}}_L(\vec{x},t;\vec{x}',t';s)$. Die Euler'sche Korrelations- und Responsefunktion folgen Bewegungsgleichungen, die aus der Navier-Stokes-Gleichung gewonnen wurde, z.B. den Gleichungen der DIA. Die Transformation von Euler- zu Lagrange'scher Beschreibung geschieht mittels Bewegungsgleichungen vom Typ (7.50). Die Berechnung erfolgt also durch Integration entlang der roten, blauen und wieder roten Linie im s-t-Diagram. Die Nichtlinearitäten, die bei der Transformation von der Lagrange- zur Euler-Beschreibung, also bei der Integration entlang der roten Wege, auftreten werden wieder entsprechend der DIA behandelt.



Infrarotdivergenzen treten auf jedem der Teilwegen auf, sie kompensieren sich aber vollständig. Die hier skizierte LHDIA (Lagrange History Direct Interaction Approximation) liefert damit Kolmogorov 41 Skalierung. Die numerische Lösung der resultierenden Gleichungen ist aufwendig und nicht ohne zusätzliche Näherungen Möglich.

Damit hat man, wenigstens im Prinzip, das Problem der Advektion gelöst. Es existiert aber nach wie vor kein kleiner Parameter, der eine Beschränkung auf die einfachsten Diagramme rechtfertigen würde. Intermittenzkorrekturen wären beispielsweise erst bei einer besseren Behandlung von Vierpunktfunktionen zu erwarten.

Ein alternativer Vorschlag zur Vermeidung der Advektionseffekte wurde von Belinicher und L'vov (1987) gemacht, und von L'vov und Procaccia (1995 und folgende) weiter entwickelt.

Es sei $\vec{y}(\vec{x}_o,t_o|t)$ die Koordinate eines Teilchens zur Zeit t, welches sich zur Zeit t_o am Ort $\vec{x}_o$ befunden hat. Sie genügt der Gleichung

$$\partial_t\,\vec{y}(\vec{x}_o,t_o|t)=\vec{u}_E(\vec{y}(\vec{x}_o,t_o|t),t) \qquad \vec{y}(\vec{x}_o,t_o|t_o)=\vec{x}_o \tag{7.53}$$

Man definiert eine Geschwindigkeitsdifferenz

$$\vec{w}(\vec{x}_o,t_o|\vec{x},t)=\vec{u}_E\big(\vec{x}+\vec{y}(\vec{x}_o,t_o|t),t\big)-\vec{u}_E\big(\vec{y}(\vec{x}_o,t_o|t),t\big) \tag{7.54}$$

für die wieder eine Bewegungsgleichung vom Typ der Navier-Stokes-Gleichung gilt. Daraus wird eine diagrammatische Entwicklung hergeleitet, die aber frei von Infrarotdivergenzen ist, da hier Geschwindigkeitsdifferenzen betrachtet werden. In einfachster Form erwartet man damit K41 Skalierung. Die Aufsummation von Leiterdiagrammen führt zu logarithmischen Divergenzen, die anomale Exponenten, also Intermittenzkorrekturen, anzeigen.

3.2.2011

8 Zweidimensionale Turbulenz

8.1 Erhaltungsgrößen

Das Energiespektrum (4.9) in zwei Dimensionen ist

$$E(k)=\frac{k\,\rho_o}{4\pi}\left\langle\vec{u}(\vec{k})\cdot\vec{u}(-\vec{k})\right\rangle \tag{8.1}$$

und die zeitliche Änderung aufgrund von Energietransfer, (4.13) und (4.14), ist

$$\dot{E}_{tr}(k)=\frac{k}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}^2p\,\mathrm{d}^2q}{(2\pi)^2}\,\delta(\vec{k}+\vec{p}+\vec{q})\,A(k,p,q) \tag{8.2}$$

mit

$$\begin{aligned}A(k,p,q)&=\frac{i\,\rho_o}{4}\Big\{\left\langle\big(\vec{k}\cdot\vec{u}(\vec{p})\big)\big(\vec{u}(\vec{k})\cdot\vec{u}(\vec{q})\big)\right\rangle+\left\langle\big(\vec{k}\cdot\vec{u}(\vec{q})\big)\big(\vec{u}(\vec{k})\cdot\vec{u}(\vec{p})\big)\right\rangle\Big\}\\&=\frac{i\,\rho_o}{4}\Big\{\left\langle\big(\vec{k}\cdot\vec{u}(\vec{p})\big)\big(\vec{u}(\vec{k})\cdot\vec{u}(\vec{q})\big)\right\rangle-\left\langle\big(\vec{p}\cdot\vec{u}(\vec{q})\big)\big(\vec{u}(\vec{k})\cdot\vec{u}(\vec{p})\big)\right\rangle\Big\}\end{aligned} \tag{8.3}$$

wobei in der zweiten Zeile $\vec{k}+\vec{p}+\vec{q}=0$ und $\big(\vec{q}\cdot\vec{u}(\vec{q})\big)=0$ benutzt wurde. Es gilt

$$A(k,p,q)=A(k,q,p)\qquad\qquad A(k,p,q)+A(p,q,k)+A(q,k,p)=0 \tag{8.4}$$

und damit die Erhaltung der Energie bezüglich Transferprozessen

$$\int\mathrm{d}k\,\dot{F}_{tr}(k)=0 \tag{8.5}$$

Für die Wirbelstärke in zwei Dimensionen gilt

$$\vec{\omega}(\vec{k})=i\,\vec{k}\times\vec{u}(\vec{k})=i\,k\,u(\vec{k})\,\vec{e}_z \tag{8.6}$$

wobei $\vec{k}$ und $\vec{u}(\vec{k})$ in der $x-y-$Ebene liegen und $\vec{e}_z$ ein Einheitsvektor in $z-$Richtung sei. Analog zu (8.1) sei

$$\Omega(k)=\frac{k}{2\pi}\left\langle\vec{\omega}(\vec{k})\cdot\vec{\omega}(-\vec{k})\right\rangle=\frac{k^3}{2\pi}\left\langle u(\vec{k})\,u(-\vec{k})\right\rangle=\frac{2\,k^2}{\rho_o}\,E(k) \tag{8.7}$$

und

$$\begin{aligned}A_\omega(k,p,q)&=\frac{i}{2}\Big\{\left\langle\big(\vec{k}\cdot\vec{u}(\vec{p})\big)\big(\vec{\omega}(\vec{k})\cdot\vec{\omega}(\vec{q})\big)\right\rangle+\left\langle\big(\vec{k}\cdot\vec{u}(\vec{q})\big)\big(\vec{\omega}(\vec{k})\cdot\vec{\omega}(\vec{p})\big)\right\rangle\Big\}\\&=\frac{i}{2}\Big\{k\,q\left\langle\big(\vec{k}\cdot\vec{u}(\vec{p})\big)\big(u(\vec{k})\,u(\vec{q})\big)\right\rangle-k\,p\left\langle\big(\vec{p}\cdot\vec{u}(\vec{q})\big)\big(u(\vec{k})\,u(\vec{p})\big)\right\rangle\Big\}\end{aligned} \tag{8.8}$$

und entsprechend (8.4) gilt

$$A_\omega(k,p,q) = A_\omega(k,q,p) \qquad A_\omega(k,p,q) + A_\omega(p,q,k) + A_\omega(q,k,p) = 0 \tag{8.9}$$

womit auch die sogenannte Enstrophie

$$Z = \int \mathrm{d}k\, \Omega(k) = \int \mathrm{d}k\, k^2\, E(k) \qquad \int \mathrm{d}k\, k^2 \dot{E}_{tr}(k) = 0 \tag{8.10}$$

eine Erhaltungsgröße ist.
Die zugehörigen Transferraten sind

$$\Pi(K) = \int_0^K \frac{\mathrm{d}^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathrm{d}^2p\,\mathrm{d}^2q}{(2\pi)^2}\, \delta(\vec{k}+\vec{p}+\vec{q})\, A(k,p,q) \tag{8.11}$$

und

$$\Pi_\omega(K) = \int_0^K \frac{\mathrm{d}^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathrm{d}^2p\,\mathrm{d}^2q}{(2\pi)^2}\, \delta(\vec{k}+\vec{p}+\vec{q})\, A_\omega(k,p,q) \tag{8.12}$$

8.2 Enstrophie- und Energiekaskade

Dimensionsanalyse in d Dimensionen liefert

$$\begin{aligned}
&E(k) \sim \rho_o\, k^{-3}\, \tau^{-2}(k) && \dot{E}_{tr}(k) \sim k^{2d-1}\, A(k,p,q) \sim \rho_o\, k^{-3}\, \tau^{-3}(k)\\
&A(k,p,q) \sim \rho_o\, k^{-2}\, \tau^{-3}(k) && \Pi(k) \sim \rho_o\, k^{-2}\, \tau^{-3}(k)\\
&\Omega(k) \sim \tfrac{1}{\rho_o}\, k^2\, E(k) \sim k^{-1}\, \tau^{-2}(k) && \Pi_\omega(k) \sim \tau^{-3}(k)\\
&\dot{E}_{diss}(k) = -\nu\, k^2\, E(k) = -\tfrac{1}{2}\nu\rho_o\, \Omega(k) && \Pi_{diss}(k) = \int_0^k \mathrm{d}\kappa\, \dot{E}_{diss}(\kappa) \sim -\nu\rho_o \tau^{-2}(k)
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Die Annahme der Existenz einer Energiekaskade ergibt Kolmogorov-41 Skalengesetze

$$\begin{aligned}
&\Pi(k) = \varepsilon && \tau(k) \sim \rho_o^{1/3}\, \varepsilon^{-1/3}\, k^{-2/3} && E(k) \sim \rho_o^{-1/3}\, \varepsilon^{2/3}\, k^{-5/3}\\
&\Pi_\omega(k) \sim \rho_o^{-1}\, \varepsilon\, k^2 && \Omega(k) \sim \rho_o^{-1/3}\, \varepsilon^{2/3}\, k^{1/3} && \Pi_{diss}(k) \sim -\nu\rho_o^{1/3}\, \varepsilon^{2/3}\, k^{4/3}
\end{aligned} \tag{8.14}$$

In zwei Dimensionen ist auch die Enstrophie erhalten und es besteht die Möglichkeit einer Enstrophiekaskade. Nimmt man an, dass ein Inertialbereich existiert, in dem außer der Wellenzahl nur die entsprechende Transferrate bestimmend ist, erhält man

$$\begin{aligned}
&\Pi_\omega(k) = \eta && \tau(k) \sim \eta^{-1/3} && E(k) \sim \rho_o\, \eta^{2/3}\, k^{-3}\\
&\Pi(k) \sim \rho_o\, \eta\, k^{-2} && \Omega(k) \sim \eta^{2/3}\, k^{-1} && \Pi_{diss}(k) \sim -\nu\rho_o\, \eta^{2/3}
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Von Kraichnan (1968) wurde folgendes Konzept entwickelt, das durch numerische Simulationen und Experimente gestützt wird. Nehmen wir an, dass die Turbulenz durch äußere Kräfte in einem Wellenzahlbereich um K_i aufrecht erhalten wird. Dann existiert für $k > K_i$ eine Enstropiekaskade in der Wirbelstärke zu kleineren Strukturen transportiert wird und schließlich durch viskose Kräfte dissipiert wird. Für $k < K_i$ existiert eine inverse Energiekaskade in der Energie zu großräumigen Strukturen transportiert wird. Um einen stationären Zustand zu erreichen muss diese letztlich zum Beispiel an

Wänden in Grenzschichten dissipiert werden. Im Übergangsbereich $k \sim K_i$ ist $\eta \sim \rho_o^{-1}\,\varepsilon\,K_i^2$ und die Abschätzungen in (8.14) und (8.15) stimmen überein.

Im Bereich der Enstrophiekaskade wird zwar Wirbelstärke zu kleinen Strukturen transportiert, der Energietransport klingt aber für $k > K_i$ schnell ab. Die bis zu einer Wellenzahl k dissipierte Energie $\Pi_{diss}(k)$ ist konstant. Die viskose Energiedissipation ist also, bis auf logarithmische Korrekturen, vernachläßigbar.

Da die auf der Skala K_i eingebrachte Energie nicht zu größeren Wellenzahlen transportiert wird, kann sie nur zu kleineren Wellenzahlen, also größeren Strukturen, transportiert werden, oder lokal dissipiert werden. Das Verhältnis von dissipierter zu eingebrachter Energie ist aber $\Pi_{diss}(K_i)/\Pi(K_i) \sim 1/Re$, ist also für große Reynold'sche Zahlen vernachlässigbar. Ein stationärer Zustand kann also nur erreicht werden, wenn weitere Mechanismen zur Dissipation von Energie, zum Beispiel durch viskose Dämpfung an Grenzschichten von äußeren Wänden, bestehen.

Insgesamt ergibt sich folgendes Bild: Kleinere Wirbel werden in der Scherströmung größerer Wirbel zu dünneren Filamenten verformt, und schließlich dissipiert. Dies entspricht der Enstrophiekaskade. Ein kleiner Teil der Wirbelstärke der kleinen Wirbel wird in die großen Wirbel eingebracht, wodurch deren Stärke noch anwächst. Im Fall zerfallender Turbulenz bleiben also nur wenige große Wirbel übrig, aber auch im Fall stationärer Turbulenz ergibt sich eine Verteilung mit wenigen großen Wirbeln. Dies entspricht der inversen Energiekaskade.

9 Literatur

Lehrbücher:

G.K.Batchelor: *The theory of homogeneous turbulence* (Cambridge University Press, 1953/1982)

M.Lesieur: *Turbulence in Fluids* (Kluwer Academic Publishers, 1997)

Übersichtsartikel:

K.R.Sreenivasan: *Fluid turbulenc*, Rev.Mod.Physics, **71**, 383 (1999)

Ye Zhou: *Renormalization group theory for fluid and plasma turbulence*, Phys. Rep. **488**, 1 (2010)

Vorlesungen aus dem Internet

G.Boffetta: *Introduction to fully developed turbulence*
http://seminairetransalpin.in2p3.fr/2009/talks/Boffetta.pdf

J.M.McDonough: *Introductory Lectures on Turbulence*
http://www.engr.uky.edu/ acfd/lctr-notes634.pdf

A. Celani: *Hydrodynamic Turbulence* (2003 Chalkidiki Summer School)
http://www.astro.auth.gr/ vlahos/school2003/ss/celani.pdf

Originalarbeiten:

A. N. Kolmogorov: *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number*, Dokl.Acad. Nauk. SSSR **30**, 9 (1941)

C.F.von Weizsäcker: *Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynoldsschen Zahlen*, Z.Phys. **124**, 614 (1948)

W.Heisenberg: *Zur Statistischen Theorie der Turbulenz*, Z.Phys. **124**, 628 (1948)

A. N. Kolmogorov: *A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number*, J. Fluid Mech. **13**, 82 (1962)

A.M.Obukhov: *Some specific features of atmospheric turbulence*, J.Fluid Mech. **13**, 77 (1962)

R.H.Kraichnan: *Irreversible statistical mechanics of incompressible hydromagnetic turbulence*, Phys. Rev. **109**, 1047 (1958)

R.H.Kraichnan: *Decay of Isotropic Turbulence in the Direct-Interaction Approximation*, Phys.Fluids. **7**, 1030 (1964)

R.H.Kraichnan: *Lagrangian-History Closure Approximation for Turbulence*, Phys.Fluids. **8**, 575 (1965)

V.L'vov and I.Procaccia: *Exact Resummations in the Theory of Hydrodynamic Turbulence I-II*, Phys.Rev. E, **52**, 3840, 3858 (1995)

R.H.Kraichnan: *Lagrangian-History Closure Approximation for Turbulence*, Phys.Fluids. **10**, 1417 (1967)