

Prof. Dr. Andreas Mielke
Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Philosophenweg 19
69120 Heidelberg
Germany

<http://www.tphys.uni-heidelberg.de/mielke/>
e-mail: mielke@tphys.uni-heidelberg.de

Stochastische Prozesse in Physik und Biologie

Andreas Mielke

Wintersemester 2006/07
Zeit: Dienstag, 9-11
Ort: Philosophenweg 19, Seminarraum

Dieses Script wird fortlaufend ergänzt.

Copyright © 1999-2006 Andreas Mielke

Abstract

Seit einigen Jahren werden in der Physik, der Chemie und der Biologie vermehrt Phänomene untersucht, die durch thermisches oder nicht-thermisches Rauschen induziert werden. Das einfachste Modell dieser Art ist ein bistabiles System. Es besteht aus zwei stabilen Zuständen, die durch eine Energiebarriere voneinander getrennt sind. Das System befindet sich also entweder in dem einen oder in dem anderen Zustand. Koppelt man dieses System an seine Umgebung, so wird es durch Wechselwirkungen mit der Umgebung von einem in den anderen Zustand getrieben. Da die Wechselwirkung mit der Umgebung typischerweise zufällig ist (wie zum Beispiel bei der Brownschen Bewegung), geschieht der Übergang von dem einen in den anderen Zustand und zurück unkorreliert. In Abhängigkeit von der Stärke der Wechselwirkung und der Höhe der Energiebarriere wird man aber eine charakteristische Zeit angeben können, in der solche Übergänge stattfinden. Koppelt man das bistabile System zusätzlich an ein schwaches periodisches Signal, so wird abwechselnd der eine oder der andere stabile Zustand metastabil. Die Übergänge sind leichter, wenn das System in dem metastabilen Zustand ist. Wenn insbesondere die charakteristische Zeit der rauschinduzierten Übergänge der Periode des Signals entspricht, dann werden Übergänge verstärkt möglich. Das periodische Signal wird also durch das zusätzliche Rauschen verstärkt. Diese Verstärkung kann sehr groß sein. Man nennt diesen Effekt *stochastische Resonanz*. Er wurde in der Natur in ganz unterschiedlichen Systemen nachgewiesen.

Ähnliche Phänomene treten auch auf, wenn das System nicht bistabil ist, sondern z.B. Zustände mit unterschiedlicher Energie oder viele gleichwertige Zustände hat. Dann kann ein z.B. ein Zustand, der die meiste Zeit metastabil ist, durch das Rauschen stabilisiert werden (*rauschinduzierte Stabilität*), oder verschiedene Zustände werden periodisch durchlaufen und man erhält *rauschinduzierten Transport*. Für beide Fälle gibt es interessante biologische Anwendungen. Rauschinduzierter Transport wird zum Beispiel als der wesentliche Mechanismus für den intrazellulären Transport angesehen.

Diese Vorlesung ist eine Einführung in die Grundlagen, die zum Verständnis rauschinduzierter Phänomene nötig sind: Stochastische Prozesse, Langevin- und Fokker-Planck Gleichung, Lösungsmethoden. Dabei liegt der Hauptaspekt auf Anwendungen in Physik und Biologie. Die oben erwähnten Phänomene werden ausführlich behandelt.

Begleitende Literatur zu der Vorlesung wird an den geeigneten Stellen bekanntgegeben.

Grundlegende Literatur:

1. H. Risken: *The Fokker-Planck Equation*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1989. [1]
2. L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni: Stochastic Resonance. *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223-287 (1998). [2]

Hinweise zu diesem Text

Das Manuscript ist in unterschiedlichen Formaten verfügbar. Ich empfehle die Verwendung der pdf-Version und den Acrobat Reader, da an vielen Stellen von den zusätzlichen Möglichkeiten

des pdf Gebrauch gemacht wird. Beispielsweise sind alle Verweise innerhalb des Textes aktive Verknüpfungen. Links für Zitate sind **dunkelrot**, Links auf Textstellen **dunkelblau**, Links auf http-Adressen **dunkelgrün** eingefärbt. Diese können sie nutzen, wenn Sie den Acrobat Reader so konfigurieren, daß bei Verweisen auf externe Quellen ein WWW-Browser die entsprechenden Seiten anzeigt.

Das Manuscript wird fortlaufend erweitert und ergänzt. Insbesondere in der zweiten Hälfte bedürfen einige Teile noch einer gründlichen Überarbeitung.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	5
2 Mathematische Beschreibung von Rauschen	6
2.1 System-Bad Modelle	7
2.2 Der dissipative harmonische Oszillator	8

1 Einführung

Wie entsteht Rauschen? Was ist Rauschen überhaupt? Alle Systeme, die man experimentell realisieren oder in der Natur beobachten kann, stehen in Wechselwirkung mit ihrer Umgebung. In fast allen Fällen besteht diese Wechselwirkung mit der Umgebung aus einer Summe vieler kleiner Effekte. Die Summe der vielen kleinen Effekte ist das, was wir mit Rauschen bezeichnen. Jeder einzelne Effekt für sich genommen ist für das System fast immer vernachlässigbar. In der Summe spielen diese Effekte aber eventuell eine wichtige Rolle. In der Regel hat man kein detailliertes Modell der Wechselwirkung eines Systems mit der Umgebung. Deshalb kann man diese Wechselwirkung nur mit stochastischen Methoden adequat beschreiben. Gerade weil man eine Summe vieler kleiner Effekte betrachtet, kann man hoffen, daß eine stochastische Beschreibung genügt, die mit wenigen Parametern auskommt. Wenn wir beispielsweise ein kleines System in Kontakt mit einem Wärmebad bringen, dann sollte sich die Wechselwirkung mit dem Wärmebad durch wenige Größen wie Temperatur und chemisches Potential parametrisieren lassen, auf Details des Wärmebades sollte es dagegen nicht ankommen.

Rauschen tritt in sehr vielen Bereichen auf. Speziell für kleine Systeme spielt Rauschen eine wichtige Rolle. Im Zuge der Miniaturisierung von vielen Anwendungen, zum Beispiel im Bereich der Mikro- oder Nanotechnologie, aber auch zum Beispiel bei der Nachrichtenübertragung kann Rauschen sehr unangenehme Konsequenzen haben. Häufig versucht man, in diesen Bereichen den Effekt des Rauschens durch geeignete Maßnahmen zu unterdrücken. Es gibt aber auch Phänomene, bei denen das Rauschen zu neuen Effekten führt, die positiv ausgenutzt werden können. Gerade im Bereich der Mikrobiologie gibt es Beispiele dafür.

Einige typische Beispiele für rauschinduzierte Phänomene aus Physik, Chemie und Biologie sind:

- Überwinden einer Barriere durch Rauschen, e.g. in chemischen Reaktionen. Häufig wird in der Chemie die Kinetik einer Reaktion quantitativ durch eine Reaktionskoordinate beschrieben. Anfangs- und Endzustand entsprechen zwei Minima in einem eindimensionalen Potential. Die beiden Minima sind durch einen Potentialwall voneinander getrennt. Ohne eine Wechselwirkung mit der Umgebung würde das System einfach in einem der Minima liegen bleiben (von quantenmechanischen Effekten sehen wir vorerst ab) oder um das Minimum oszillieren. Diese Oszillationen können zum Beispiel Schwingungen eines an der Reaktion beteiligten Moleküls sein. Berücksichtigt man die Wechselwirkung mit der Umgebung, dann treten zwei Effekte auf. Zum einen wird die Bewegung gedämpft (Reibung), zum anderen können Übergänge von einem Zustand in den anderen induziert werden. Begrifflich unterscheidet man daher Dissipation (den Verlust von Bewegungsenergie an die Umgebung) und Fluktuation (in dem Beispiel die Übergänge). Da Fluktuation und Dissipation die gleiche Ursache haben, können sie nicht unabhängig voneinander sein. Der Zusammenhang zwischen beiden wird als Fluktuations-Dissipations-Theorem bezeichnet. In dem Beispiel wird eine chemischen Reaktion durch den Übergang von einem Zustand in einen anderen beschrieben. Die Zeitskala, auf der dieser Übergang geschieht, hängt von der Höhe der Energiebarriere zwischen den beiden Zuständen ab und von der Temperatur der Umgebung. Die Theorie hierzu geht auf Kramers zurück.

- Rauschinduzierter Transport ist ein weiteres Phänomen, das durch Rauschen verursacht wird. Allerdings benötigt man dazu nicht thermisches Rauschen. Für thermisches Rauschen verbietet der zweite Hauptsatz einen rauschinduzierten Transport. Nichtthermisches Rauschen kann seine Ursache zum Beispiel in chemischen Reaktionen haben. Wenn die Zeitskala, auf der diese Reaktionen ablaufen, nicht deutlich kleiner ist als andere typische Zeitskalen, dann führt dies zu zeitlichen Korrelationen und kann neue Effekte hervorrufen. Biochemische Reaktionen von Proteinen in Zellen haben zum Beispiel längere Reaktionszeiten. Ein Beispiel für rauschinduzierten Transport ist der intrazelluläre Transport durch sogenannte Motorproteine.
- Stochastische Resonanz wurde schon in der Zusammenfassung erwähnt. Sie tritt auf, wenn man zusätzlich zu einem Rauschen noch ein periodisches Signal in ein bistabiles System einkoppelt. Unter bestimmten Bedingungen kommt es zu einer Verstärkung des periodischen Signals durch Rauschen das Rauschen. Beispiele, in denen dieser Effekt beobachtet wurde, sind Ringlaser, elektrische Schaltkreise oder Neuronen.

In vielen Fällen ist eine mathematisch exakte Beschreibung rauschinduzierter Phänomene möglich. In dieser Vorlesung soll es aber hauptsächlich um Anwendungen gehen und weniger um den sicher auch interessanten Aspekt der mathematisch sauberen Beschreibung von rauschinduzierten Phänomenen. Trotzdem benötigen wir einige mathematische Grundlagen, die im nächsten Kapitel eingeführt werden.

2 Mathematische Beschreibung von Rauschen

In diesem Kapitel werden verschiedene Möglichkeiten diskutiert, Systeme mathematisch zu beschreiben, die mit ihrer Umgebung wechselwirken. Wir werden zunächst in einem einfachen Modell die Umgebung durch harmonische Oszillatoren beschreiben. Unter bestimmten Annahmen kann man eine solche Umgebung durch eine stochastische Kraft modellieren. Im zweiten Abschnitt behandeln wir Bewegungsgleichungen, die eine stochastische Kraft enthalten, speziell die Brownsche Bewegung. Anschließend werden wir einfache Klassen von Rauschprozessen kennenlernen, die in vielen unterschiedlichen Modellen benutzt werden. In den darauf folgenden Abschnitten lernen wir die Fokker-Planck-Gleichung kennen. Sie beschreibt das zeitliche Verhalten von Wahrscheinlichkeitsdichten. Wir diskutieren verschiedene Zeitskalen, die in einfachen Systemen mit einer stochastischen Kraft vorkommen und erwähnen Lösungsmethoden für diese Systeme.

In diesem Kapitel werden zwar einige formale Grundlagen behandelt; Ziel ist aber eine möglichst anschauliche Beschreibung. In vielen Fällen ist eine mathematisch saubere Behandlung der erwähnten Probleme möglich. Es entspricht weder der Zielsetzung noch dem zeitlichen Rahmen dieser Vorlesung, solche Details zu diskutieren. Es sollte aber klar sein, daß eine saubere mathematische Behandlung möglich und sinnvoll ist. Für Details und weitergehende Literatur ist das Buch von Risken [1] sehr zu empfehlen.

2.1 System-Bad Modelle

Eine anschauliche Modellierung von Rauschen besteht darin, das System direkt mit einem Wärmebad wechselwirken zu lassen. Die Hamiltonfunktion (oder für ein quantenmechanisches System der Hamiltonoperator) hat dann die Form

$$H = H_S + H_B + H_{SB}$$

H_S beschreibt dabei das System, H_B die Umgebung (Wärmebad) und H_{SB} die Kopplung zwischen System und Umgebung. In einem solchen Modell besteht schon konzeptionell eine Asymmetrie: Man interessiert sich letztlich nur für die Bewegung des Systems; für das System sind auch Informationen vorhanden und es ist eventuell experimentell zugänglich. Physikalische Details des Wärmebades und auch der Kopplung des Systems an das Wärmebad sind dagegen unbekannt. In der Regel beschreibt man das System zum Beispiel durch zeitabhängige Korrelationsfunktionen, wobei über die Freiheitsgrade des Bades gemittelt wird. Die Erwartung ist, daß die Resultate von den Details des Bades unabhängig sind. Diese Vorstellung entspricht dem, was man von einem Wärmebad in der statistischen Physik immer annimmt: Wenige globale Eigenschaften wie Temperatur oder chemisches Potential sollten ausreichen, um das Bad zu charakterisieren. Wenn dem so ist, dann liegt es nahe, das Bad durch harmonische Oszillatoren zu beschreiben. Ein einfaches Modell für ein Teilchen in einem Potential, das in Wechselwirkung mit einem Wärmebad steht, kann durch die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) + \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{m_i}{2} \tilde{\omega}_i^2 q_i^2 \right) + \sum_i \lambda_i (q - q_i)^2 \quad (1)$$

beschrieben werden. Die Bewegungsgleichungen sind die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= F(q) - 2 \sum_i \lambda_i (q - q_i) \\ \dot{q}_i &= \frac{p_i}{m_i} \\ \dot{p}_i &= -m_i \tilde{\omega}_i^2 q_i - 2\lambda_i (q_i - q) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich weiterbehandeln, indem man zunächst die Bewegungsgleichungen für die Badvariablen integriert und das Ergebnis in die Gleichung für die Systemvariable einsetzt. Dabei treten Integrationskonstanten auf, die mit den Anfangsbedingungen der Badvariablen zusammenhängen. Diese Anfangsbedingungen sind natürlich unbekannt, man muß an dieser Stelle also geeignete statistische Annahmen machen. An Stelle einer allgemeinen Diskussion betrachten wir als erstes und einfaches Beispiel einen harmonischen Oszillator, der an eine Umgebung gekoppelt ist.

2.2 Der dissipative harmonische Oszillator

Die Hamiltonfunktion für dieses einfache Modell ist

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \tilde{\omega}^2 q^2 + \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m}{2} \tilde{\omega}_i^2 q_i^2 \right) + \sum_i \lambda_i (q - q_i)^2. \quad (2)$$

Es ist zweckmäßig, die Quadrate in (2) auszumultiplizieren. Dabei treten die Größen $\omega^2 = \tilde{\omega}^2 + \frac{2}{m} \sum_i \lambda_i$, $\omega_i^2 = \tilde{\omega}_i^2 + \frac{2}{m_i} \lambda_i$ auf. ω muß endlich sein, d.h. $\sum_i \lambda_i$ muß definiert sein. Analog zur Quantenmechanik ist es günstig, statt mit Ort und Impuls mit den komplexen Koordinaten

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{m\omega} q + ip / \sqrt{m\omega})$$

$$b_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{m_i \omega_i} q_i + ip_i / \sqrt{m_i \omega_i})$$

und ihren komplex Konjugierten zu rechnen. Es gilt

$$q = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (b + b^*)$$

$$p = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{m\omega}{2}} (b - b^*)$$

und analog für q_i und p_i . Mit Hilfe dieser Größen kann die Hamiltonfunktion in der Form

$$H = \omega b^* b + \sum_i \omega_i b_i^* b_i - \sum_i \frac{\lambda_i}{\sqrt{m\omega m_i \omega_i}} (b + b^*) (b_i + b_i^*) \quad (3)$$

geschrieben werden. Die Kopplungskonstante im letzten Term bezeichnen wir im Folgenden mit $g_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{m\omega m_i \omega_i}}$. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die neue Hamiltonfunktion (3) sind $\dot{b} = -i \frac{\partial H}{\partial b^*}$ und analog für b_i sowie die komplex konjugierten Gleichungen. Man erhält

$$\dot{b}_i = -i\omega_i b_i + ig_i (b + b^*)$$

$$\dot{b} = -i\omega b + i \sum_i g_i (b_i + b_i^*)$$

Die erste Gleichung kann direkt integriert werden.

$$b_i = b_{i0} \exp(-i\omega_i t) + ig_i \int_0^t \exp(-i\omega_i(t-t')) (b(t') + b^*(t')) dt'$$

Wir setzen dieses Ergebnis in die zweite Gleichung ein und erhalten eine Bewegungsgleichung für b

$$\dot{b} = -i\omega b - 2i \sum_i g_i^2 \int_0^t \sin(\omega_i(t-t')) (b(t') + b^*(t')) dt' + i \sum_i g_i (b_{i0} \exp(-i\omega_i t) + b_{i0}^* \exp(i\omega_i t))$$

Der erste Term in dieser Gleichung ist die ursprüngliche Oszillation des harmonischen Oszillators. Der zweite Term ist eine effektive Rückkopplung: Die Bewegung des Systems hängt offenbar von seiner Vergangenheit ab. Wir werden gleich eine plausible Annahme machen, die dazu führt, daß diese Rückkopplung nicht auftritt, der zweite Term beschreibt dann nur noch die Reibung oder die Dissipation. Der dritte Term hängt von den Anfangsbedingungen der Badoszillatoren ab. Er besteht aus einer Summe vieler kleiner Terme, über die wir nichts genaues wissen. Dieser Term wird die Rolle einer stochastischen Kraft spielen.

Im Folgenden nehmen wir an, daß die harmonischen Oszillatoren b_i ein thermodynamisch großes Bad bilden. Man kann dann den thermodynamischen Limes durchführen. Wir nehmen an, daß die Frequenzen ω_i kontinuierlich verteilt sind. Dann ist

$$G(\omega') = 2 \sum_i g_i^2 \delta(\omega' - \omega_i)$$

eine kontinuierliche Funktion und die Summe im zweiten Term kann in der Form

$$\int d\omega' G(\omega') \sin(\omega'(t-t')) = -\frac{d}{dt'} \int d\omega' \frac{G(\omega')}{\omega'} \cos(\omega'(t-t')) = -\frac{d}{dt'} R(t-t')$$

geschrieben werden. Das Verhalten der Funktion $G(\omega)$ oder alternativ der Funktion $R(t)$ beschreibt das Bad und die System-Bad Kopplung. Für die Bewegungsgleichung erhält man

$$\begin{aligned} \dot{b} = & -i\omega b + iR(0)(b + b^*) - iR(t)(b(0) + b^*(0)) - i \int_0^t dt' R(t-t') (\dot{b}(t') + \dot{b}^*(t')) \\ & + i \sum g_i (b_{i0} \exp(-i\omega_i t) + b_{i0}^* \exp(i\omega_i t)) \end{aligned}$$

Der zweite Term in dieser Gleichung führt zu einer Verschiebung der Frequenz ω . Damit die Gleichung wohldefiniert ist, muß $2R(0) \leq \omega$ gelten. $R(t)$ ist eine Summe vieler oszillierender Beiträge und wird daher für große t schnell abfallen. Daher trägt der dritte Term nur für sehr kleine t bei und der vierte Term liefert Beiträge für $t \approx t'$. Damit erhält man aus dem Realteil und dem Imaginärteil dieser Gleichung die Bewegungsgleichungen für p und q .

$$\dot{q} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = -m\omega^2 q + 2m\omega R(0)q - 2m\omega R(t)q(0) - \kappa \dot{q} + \sqrt{2m\omega} \sum_i g_i (b_{i0} \exp(-i\omega_i t) + b_{i0}^* \exp(i\omega_i t))$$

Daraus ergibt sich

$$m\ddot{q} = -m\omega_{\text{ren}}^2 q - \kappa \dot{q} + F(t)$$

mit

$$\kappa \approx 2m\omega \int_0^\infty dt R(t)$$

$$\omega_{\text{ren}} = \sqrt{\omega^2 - 2\omega R(0)}$$

und

$$F(t) = \sqrt{2m\omega} \sum_i g_i (b_{i0} \exp(-i\omega_i t) + b_{i0}^* \exp(i\omega_i t))$$

Damit ω_{ren} reell ist, muß $2R(0) \leq \omega$ gelten; diese Ungleichung hatten wir oben schon gesehen.

Man sieht also, daß der vierte Term in der Gleichung für b direkt die Stokessche Reibung liefert, wenn $R(t)$ eine schnell mit t abfallende Funktion ist. Wir diskutieren weiter unten, welche Bedingungen dazu genau zu erfüllen sind. Der fünfte Term liefert eine zeitabhängige Kraft $F(t)$. Die Kraft $F(t)$ hängt von den (unbekannten) Anfangsbedingungen des Bades ab. Typischerweise kennt man nur statistische Eigenschaften des Bades. Von den Anfangsbedingungen sind also nur statistische Eigenschaften bekannt, zum Beispiel die Verteilungsfunktion. Damit wird $F(t)$ eine stochastische Größe, von der die Verteilungsfunktion oder eventuell nur einzelne Momente bekannt sind. Wir berechnen die zweiten Momente

$$\langle F(t)F(t') \rangle = 2m\omega \sum_{ij} g_i g_j \langle (b_{i0} \exp(-i\omega_i t) + b_{i0}^* \exp(i\omega_i t))(b_{j0} \exp(-i\omega_j t') + b_{j0}^* \exp(i\omega_j t')) \rangle$$

Wenn wir annehmen, daß die Anfangswerte von unterschiedlichen Badmoden unabhängig verteilt sind, dann treten in der Summe nur Terme mit $i = j$ auf. Die Erwartungswerte $\langle b_{i0}^* b_{i0} \rangle$ hängen von ω_i ab. Damit erhält man

$$\langle F(t)F(t') \rangle = 4m\omega \sum_i g_i^2 \langle b_{i0}^* b_{i0} \rangle \cos(\omega_i(t - t'))$$

Wegen des Gleichverteilungssatzes gilt

$$\langle b_{i0}^* b_{i0} \rangle = \frac{k_B T}{\omega_i}$$

und man erhält

$$\langle F(t)F(t') \rangle = 4m\omega k_B T \sum_i \frac{g_i^2}{\omega_i} \cos(\omega_i(t - t')) = 4m\omega k_B T R(t - t')$$

Das zweite Moment der fluktuierenden Kraft hängt also direkt mit der Dissipation zusammen. Wenn $R(t)$ schnell abfällt, dann kann man $R(t)$ durch

$$R(t) \approx \delta(t) \int dt' R(t') = \frac{\kappa}{m\omega} \delta(t)$$

ersetzen. Das ist natürlich im Widerspruch zu der oben hergeleiteten Ungleichung $2R(0) \leq \omega$. In der Tat ist $R(t) \propto \delta(t)$ nur eine in bestimmter Näherung gerechtfertigte Annahme. Wir können diese Annahme nur machen, wenn wir zusätzlich ω_{ren} festhalten und reell wählen. Allerdings ist die Annahme $R(t) \propto \delta(t)$ physikalisch sinnvoll, da man in der Regel annehmen wird, daß keine Korrelation zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kraftstößen von Teilchen des Bades auf das Teilchen bestehen. Die Korrelationszeit τ für $F(t)$, die den Abfall von $R(t)$ festlegt, ist also etwa die Stoßzeit für solche Stöße. Solange τ klein im Vergleich zu ω^{-1} oder anderen charakteristischen Zeitskalen des Systems ist, ist die δ -Funktion als Näherung gerechtfertigt.

Ein zeitlich unkorreliertes Rauschen nennt man weiß. Man erhält es für den Fall, daß $G(\omega)/\omega$ (und äquivalent g_i^2/ω_i) konstant ist. Da $R(0)$ endlich sein muß, kann das nicht wirklich gelten. Man benötigt immer einen Ultraviolett-Cutoff ω_c . Im Limes $\omega_c \rightarrow \infty$ erhält man ein weißes Rauschen. Typischerweise wird man aber eine schwache Abhängigkeit von ω_i haben und damit statt der δ -Funktion eine abfallende Funktion mit einer Korrelationszeit τ erhalten.

Sowohl die Reibungskonstante κ als auch das zweite Moment der Kraft $F(t)$ werden durch G parametrisiert. Beide sind also nicht unabhängig. Der Zusammenhang zwischen beiden ist ein einfaches Beispiel für ein Fluktuations-Dissipations-Theorem.

Wenn die Masse m des harmonischen Oszillators hinreichend groß ist, dann kann typischerweise der Effekt der fluktuierenden Kraft $F(t)$ vernachlässigt werden. Man erhält dann die übliche Bewegungsgleichung mit Reibung. Für kleine Massen dagegen ist $F(t)$ wichtig.

Wesentlich ist auch der Übergang zum thermodynamischen Limes. Ohne diesen Übergang erhält man immer ein System mit charakteristischen Eigenmoden.

Literatur

- [1] H. Risken: *The Fokker-Planck Equation*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1989.
- [2] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni: *Stochastic Resonance*. Rev. Mod. Phys. **70**, 223-287 (1998).
- [3] A. Einstein: *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierenden Teilchen*. Annalen der Physik **17**, 549-560 (1905).