1 Nicht-lineare dynamische Systeme

1.1 Charakteristika linerarer Systeme

Superpositionsprinzip: Sind x_1 und x_2 Lösungen eines linearen Systems, dann ist auch $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ eine Lösung. Berühmte Beispiele: Elektrodynamik, Quantenmechanik.

1.2 Eindimensionale dynamische Systeme

Ein dynamisches System oder ein dynamischer Prozeß ist ein System, das durch zeitabhängige Größen $x(t)$ beschrieben wird. $x(t)$ kann eine mehrkomponentige Größe sein, die Zeit kann eine kontinuierliche oder diskrete Variable sein. Im ersten Fall wird man die Dynamik typischerweise durch eine Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{1}$$

im zweiten Fall durch eine Rekursionsgleichung

$$x(t + \Delta t) = f(x(t), t) \tag{2}$$

beschreiben. Wenn f in diesen Ausdrücken nicht-linear ist, spricht man von einem nicht-linearen System. Wenn f nicht von t abhängt, nennt man das System ein autonom. Wir betrachten im folgenden autonome Systeme.

Wir betrachten zunächst einige einfache eindimensionale Beispiele.

Beispiel:

$$\frac{dx}{dt} = -ax^{\alpha},\ \alpha > 1,\ a > 0 \tag{3}$$

Superpositionsprinzip gilt nicht. Lösung:

$$\frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} = -a(t - t_0) \tag{4}$$

$$x = \left[(\alpha - 1)a(t - t_0) + x_0^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{5}$$

x fällt monoton. Für große t erhält man

$$x = ((\alpha - 1)at)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{6}$$

Man erhält also ein universelles Verhalten, daß unabhängig von der Anfangsbedingung ist. Die lineare Gleichung ($\alpha = 1$) hat dagegen die Lösung $x = x_0 \exp(-\alpha(t - t_0))$, die für alle t von der Anfangsbedingung abhängt. Die Lösung der Gleichung mit $\alpha > 1$ hat für große t die Eigenschaft:

$$x(\lambda t) = \lambda^{\frac{1}{1-\alpha}} x(t) \tag{7}$$

Diese Eigenschaft nennt man Skaleninvarianz oder Affininvarianz. Sie ist typisch für nichtlineare Systeme. Sie tritt in sehr vielen Bereichen in der Natur auf. Ein prototypisches Beispiel ist die Turbulenz.

1.3 Begrenzte Skaleninvarianz

In der Natur gilt Skaleninvarianz meist nur in bestimmten Parameterbereichen.

Beispiel:

$$\frac{dx}{dt} = -ax - bx^3 \tag{8}$$

Lösung

$$2a(t - t_0) = \ln\left[\frac{a + bx^2}{x^2}\frac{x_0^2}{a + bx_0^2}\right] \tag{9}$$

Ich setze der Einfachheit halber $t_0 = 0$. Ist $a \gg bx_0^2$, dann gilt auch $a \gg bx^2$ und man erhält einen exponentiellen Abfall $x = x_0 \exp(-at)$. Ist dagegen $bx_0^2 \gg a$, dann gilt das auch noch für nicht zu große t und man erhält

$$2at = \ln\left[\frac{1 + \frac{a}{bx^2}}{1 + \frac{a}{bx_0^2}}\right] \approx \frac{a}{bx^2} - \frac{a}{bx_0^2} \tag{10}$$

und damit die obige Lösung. Für den Fall $bx_0^2 \gg a$ erhält man also folgende Bereiche:

$0 \leq t < 1/(2bx_0^2)$	Die Lösung hängt von der Anfangsbedingung ab.
$1/(2bx_0^2) < t < 1/(2a)$	$x \approx (2bt)^{-1/2}$
$1/(2a) < t$	$x = \sqrt{a/b}\exp(-at)$

Man erhält in diesem Fall für große t ein universelles Verhalten, das für $1/(2bx_0^2) < t < 1/(2a)$ skaleninvariant ist. Ein Bereich mit Skaleninvarianz tritt also nur dann auf, wenn

$$R = \frac{bx_0^2}{a} \gg 1 \tag{11}$$

ist. Führt man die dimensionslosen Größen $\bar{x} = x/x_0$ und $\bar{t} = tbx_0^2$, dann erhält man

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = -\frac{\bar{x}}{R} - \bar{x}^3,\ \bar{x}(0) = 1 \tag{12}$$

Das bedeutet, daß Zeitverläufe zu unterschiedlichen a, b, x_0 ähnlich sind, wenn sie das gleiche R haben. Solche Ähnlichkeit von Lösungen tritt bei gemischten Systemen mit linearen und nichtlinearen Anteilen generisch auf. Ein klassisches Beispiel ist die Navier-Stokes Gleichung. Die Größe R entspricht dort der Reynoldszahl. Systeme mit gleicher Reynoldszahl sind ähnlich, deshalb kann man das Strömungsverhalten an Flugzeugen oder Autos im Windkanal an kleinen Modellen studieren. Ist die Reynoldszahl groß, tritt ein Bereich mit Skalenverhalten auf. Ist $R < 1$, dann spielt die Nichtliearität keine Rolle.

1.4 Bifurkation

Beispiel:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^3,\ a > 0,\ b > 0 \tag{13}$$

Lösung

$$2a(t - t_0) = -\ln\left[\frac{a - bx^2}{x^2}\frac{x_0^2}{a - bx_0^2}\right] \tag{14}$$

Für $t \to \infty$ geht $bx^2 \to a$, also $x \to \pm\sqrt{a/b}$. Das asymptotische Verhalten ist ein exponentieller Abfall auf diesen Wert. Während also für $a < 0$ x nach 0 geht, geht x gegen einen endlichen Wert für $a > 0$. Das ist ein einfaches Beispiel für Bifurkation: In Abhängigkeit von einem Parameter ändert sich das Verhalten des Systems grundlegend.

Das Beispiel macht schon das generelle Vorgehen deutlich. Hat man eine Abbildung der Form

$$\frac{dx}{dt} = f(x, a) \tag{15}$$

dann kann man eine Konvergenz gegen x_∞ erhalten, falls

$$f(x_\infty, a) = 0 \tag{16}$$

Diese Gleichung kann natürlich mehrere Lösungen haben. Eine Lösung ist dann stabil, wenn $x(t)$ gegen x_∞ konvergiert, sofern der Startwert in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_∞ liegt. Das ist der Fall, wenn $f'(x_\infty, a) < 0$. Stabilität hängt von den externen Parametern a ab. Es muß aber keine Konvergenz geben.

Generell bezeichnet man einen Punkt $\bar{x}$ als Gleichgewichtspunkte, wenn $f(\bar{x}) = 0$ gilt. Ist $f'(\bar{x}) > 0$, so hat man ein instabiles Gleichgewicht, ist $f'(\bar{x}) < 0$, so hat man ein stabiles Gleichgewicht.

Für diskrete Abbildungen

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{17}$$

hat man einen Gleichgewichtspunkt bei $\bar{x}$, falls

$$\bar{x} = f(\bar{x}) \tag{18}$$

Stabilität erhält man, wenn $|f'(\bar{x})| < 1$, Instabilität für $|f'(\bar{x})| > 1$. Setzt man $x_n = \bar{x} + \delta_n$, dann erhält man

$$\delta_{n+1} = f'(\bar{x})\delta_n + O(\delta_n^2) \tag{19}$$

und $\delta_n \to 0$ für $|f'(\bar{x})| < 1$. Wenn das nicht der Fall ist, kann es periodische Lösungen geben. Eine periodische Lösung mit Periode p ist eine stabile Lösung der Abbildung

$$x_{n+1} = f^p(x_n) = f(f(\ldots f(x_n)\ldots)) \tag{20}$$

mit $|\frac{d}{dx} f^p(\bar{x})| < 1$.

Beispiel: Logistische Abbildung. Die logistische Abbildung (logistic map) wurde 1977 von Großmann und Thomae als Prototyp für nicht-lineare Dynamik eingeführt. Es handelt sich um die Abbildung

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n),\ 0 < r \leq 4 \tag{21}$$

Für $r < 1$ läuft die Folge x_n nach $x_\infty = 0$. Da x_n mit steigendem n immer kleiner wird, erhält man einen asymtotischen Abfall $x_n \propto r^n$. Das entspricht dem exponentiellen Zerfall in einer linearen Differentialgleichung. Der asymptotische Wert $x_\infty = 0$ ist die eine der beiden Lösungen der Gleichung $x_\infty = f(x_\infty)$, also

$$x_\infty = rx_\infty(1 - x_\infty) \tag{22}$$

Für $1 < r < 3$ läuft die Folge x_n auf den zweiten Fixpunkt zu, also $x_\infty = 1 - \frac{1}{r}$. Ist dieser Fixpunkt stabil? Stabilität erhält man, wenn $|f'(x_\infty)| < 1$. Setzt man $x_n = x_\infty + \delta_n$, dann erhält man

$$\delta_{n+1} = f'(x_\infty)\delta_n + O(\delta_n^2) \tag{23}$$

und $\delta_n \to 0$ für $|f'(x_\infty)| < 1$.Es gilt $f'(x_\infty) = r(1 - 2x_\infty) = r(-1 + 2/r) = 2 - r$. Für $r = r_1 = 3$ wird der Fixpunkt instabil und es treten zwei neue Fixpunkte auf. Man findet sie als Lösung der Gleichung

$$x_\infty = f(f(x_\infty)). \tag{24}$$

Dies ist eine Gleichung vierten Grades, zwei Lösungen sind die bereits bekannten, die weiteren beiden sind

$$x_{\infty\pm} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2r} \pm \frac{1}{2r}\sqrt{r^2 - 2r - 3} \tag{25}$$

Es gilt $f(x_{\infty+}) = x_{\infty-}$, so daß die Abbildung zwischen diesen beiden Werten oszilliert. Diese beiden Fixpunkte sind bis zu r_2 stabil. r_2 berechnet man, indem man wieder $x_n = x_{\infty+} + \delta_n$ setzt. Dann gilt

$$\delta_{n+2} = f'(f(x_\infty))f'(x_\infty)\delta_n \tag{26}$$

und die Folge der δ_n konvergiert nach 0 falls $|f'(f(x_\infty))f'(x_\infty)| < 1$. Danach tritt wieder eine Verdopplung auf, die entsprechenden Werte erhält man aus $x_\infty = f(f(f(f(x_\infty))))$ und so fort. Wenn $r > r_\infty = 3,5699\ldots$ ist, wird das System chaotisch. Genauer erhält man folgende Szenarien:

1. $0 < r < 1$: Exponentieller Zerfall nach $x_\infty = 0$. Für $r = 1$ bricht der exponentielle Zerfall zusammen.
2. $1 < r < 2$: Exponentieller Zerfall nach $x_\infty = 1 - \frac{1}{r}$.
3. $2 < r < 3$: Exponentieller Zerfall mit alternierendem Vorzeichen nach $x_\infty = 1 - \frac{1}{r}$. Das läßt sich einfach zeigen, indem man $x_n = x_\infty + \delta_n$ setzt und linearisiert. Die Linearisierung bricht bei $r = 3$ zusammen.
4. $3 < r < 3.57$: Kaskade von Zyklen der Periode 2^n. Mit wachsendem r wird n größer.
5. $3.57 < r < 3.82$: Bereich mit abwechselnd chaotischen und periodischem Verhalten mit sehr langen Perioden.
6. $3.83 < r < 3.85$: Ein Bereich mit Periode 3 und anschließenden Periodenverdopplungen für $3.842 < r < 3.85$, als Perioden 3×2^n.
7. $3.85 < r < 4$:Chaotisches Verhalten mit kleinen periodischen Bereichen mit hoher Periode k und Periodenverdopplungen $k \times 2^n$.
8. $r = 4$: Vollständig chaotisches Verhalten. x nimmt alle Werte zwischen 0 und 1 an.

Die exakte Lösung für $r = 4$ ist

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2^n \arccos(1 - 2x_0)) \tag{27}$$

Anwendungen in vielen Bereichen, z.B. Populationsdynamik.

1.5 Zweidimensionale Systeme, singuläre Punkte, Grenzzyklen

In einem eindimensionalen System treten nur (stabile oder instabile) Fixpunkte auf. In einem zweidimensionalen System gibt es mehr Möglichkeiten.

Ein zweidimensionales System wird wie ein eindimensionales durch die Gleichung (1) beschrieben, mit dem Unterschied, daß x und f Werte aus $\mathbb{R}^2$ annehmen. Wir betrachten im folgenden wie oben schon autonome Systeme.

In einem zweidimensionalen System kann man die Trajektorien, auf denen sich das System bewegt, aus der Gleichung

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \tag{28}$$

bestimmen. Einen Punkt im Phasenraum, an dem $f(x) = 0$ gilt, nennt man singulären Punkt. Wenn alle Trajektorien auf so einen Punkt zeigen, ist es ein stabiler Punkt, wenn alle davon wegzeigen, ein instabiler Punkt. Daneben gibt es weitere Möglichkeiten.

Im folgenden nehmen wir der Einfachheit halber an, daß ein singulärer Punkt bei $x = 0$ liegt. Wir entwickeln um diesen Punkt. In linearer Ordnung gilt

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{29}$$

wobei A eine reelle 2×2-Matrix ist. Die Eigenschaften des Punktes können aus den Spektraleigenschaften der Matrix gewonnen werden. Seien λ_i die Eigenwerte und $\bar{x}_i$ die zugehörigen rechten Eigenvektoren. Man kann dann $x = \xi_1 \bar{x}_1 + \xi_2 \bar{x}_2$ setzen und erhält

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \lambda_i \xi_i \tag{30}$$

Folgende Fälle können unterschieden werden:

1. Beide Eigenwerte sind reell.

(a) Beide Eigenwerte sind negativ: Stabiler Punkt.

(b) Beide Eigenwerte sind positiv: Instabiler Punkt.

(c) Ein Eigenwert positiv, einer negativ: Sattelpunkt.

2. Die Eigenwerte sind komplex. Da die Matrix reell ist, sind die Eigenwerte konjugiert komplex, $\lambda_1 = \lambda_2^*$. In diesem Fall gilt

$$\xi_{1,2} = \xi_{1,2}(0)\exp(at \pm i\omega t). \tag{31}$$

(a) $a < 0$: Stabiler Fokus. Die Trajekorien laufen spiralförmig in den Punkt hinein.

(b) $a > 0$: Instabiler Fokus. Die Trajektorien laufen spiralförmig von dem Punkt weg.

(c) $a = 0$: Zentrum. Die Trajektorien laufen kreisförmig um den Punkt.

Neben singulären Punkten können Grenzzyklen auftreten. Ein Grenzzyklus ist eine geschlossene Trajektorie, auf die andere Trajektorien zulaufen.

Beispiel: Van der Pol Oszillator

Die Bewegungsgleichung des Van der Pol Oszillators lautet

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0. \tag{32}$$

$x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ ist ein singulärer Punkt. Wir betrachten zunächst die Umgebung dieses Punktes. Wir setzen $v = \frac{dx}{dt}$. Die linearisierte Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}$. Wir können folgende Fallunterscheidung treffen:

1. $\mu > 0$: Das ist der gedämpfte Fall, der singuläre Punkt ist ein stabiler Fokus. Die Eigenwerte haben einen negativen Realteil.

2. $\mu = 0$: Das ist der normale, klassische Oszillator. Der singuläre Punkt ist ein Zentrum.

3. $\mu < 0$: Der singuläre Punkt ist ein instabil.

Wir betrachten jetzt die selbe Gleichung für große x. Dann gilt asymptotisch $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu x}$ und damit $x^2 = \frac{2t}{\mu} + x_0^2$. Für $\mu < 0$ nimmt der Betrag von x also ab. Wir haben also für $\mu < 0$ eine Situation, in der für große x alle Trajektorien für kleine x nach außen, für große x nach innen laufen. Das ist die Situation, in der es einen Grenzzyklus gibt.

Allgemeiner ist das die Aussage des *Poincaré-Bendixson-Theorems.* Wenn es im Phasenraum zwei geschlossene Kurven gibt, durch die innere Kurve alle Trajektorien von innen nach außen laufen und durch die äußere von außen nach innen, dann gibt es einen Grenzzyklus zwischen beiden Kurven.

1.6 Höherdimensionale Systeme

Höherdimensionale Systeme können in ähnlicher Weise behandelt werden. Neben Fixpunkten und Grenzzyklen können natürlich noch weitere Effekte auftreten. Ich verzichte hier auf eine detaillierte Diskussion höherdimensionaler Systeme. Die Vorgehensweise ist analog zu dem bisher gezeigten.