

Feynman's Ratsche & Rauschinduzierter Transport

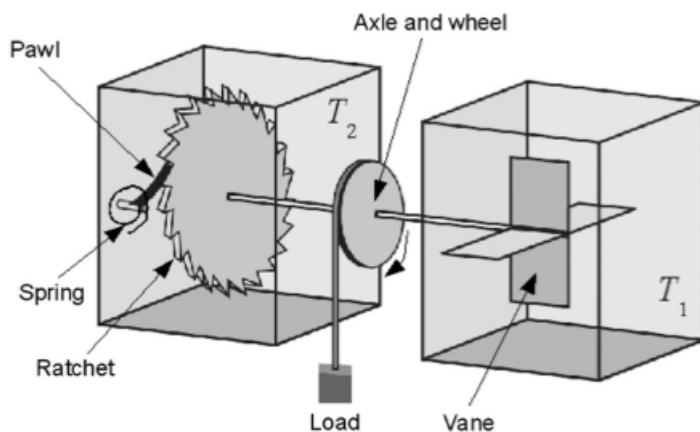
Lukas Fischer - Seminar Mechanik

11. Januar 2018

1 Feynman's Ratsche

Hier wird das historische Modell der mikroskopisch kleinen „Feynman Ratsche“ von Feynman und Smoluchowski untersucht, das den rauschinduzierten Transport durch thermische Fluktuationen im Ungleichgewicht sehr anschaulich motiviert.

1.1 Prinzip



Modell von Feynman's Ratsche (Quelle: [6])

Grundbegriffe:

- Energie, um Sperrhaken („Pawl“) über Ratschenzahn zu heben: ϵ
- Winkel zwischen zwei Ratschenzähnen: θ
- Drehmoment durch die angelegte Last: L
- Temperaturen des Flügelrads, bzw. der Ratsche: T_1, T_2

Feynman's Modell:

- Ungerichtete Stöße der Teilchen mit Flügelrad aufgrund der Brown'schen Bewegung
- Die Ratsche sperrt jedoch eine Bewegungsrichtung
- Stöße, die die Energie $\epsilon + L\theta$ aufbringen können, bewirken eine Drehung der Ratsche um den Winkel θ

Bemerkung:

- Es wird also durch thermische Fluktuationen im Gleichgewicht (also sogar für $T_1 = T_2$) Arbeit verrichtet
- \Rightarrow **Perpetuum mobile zweiter Art: Widerspruch zum 2. Hauptsatz der Thermodynamik**

1.2 Detaillierte Betrachtung

Korrektur des Modells:

- Alle Bauteile der Maschine unterliegen der Brown'schen Bewegung
- Der Sperrhaken kann hochspringen und einen Rückwärtsschritt ermöglichen
- Boltzmann-verteilte Wahrscheinlichkeiten für Vorwärts- und Rückwärtsschritt (siehe Tabelle)
- Für $T_1 = T_2$ und $L = 0 \Rightarrow$ keine Netto-Bewegung (Widerspruch aus Teil 1.1 aufgehoben!!)
- Nur für das thermische Ungleichgewicht $T_2 < T_1$ ist Vorwärtsbewegung möglich \rightarrow Dies bewirkt dann einen Wärmetransport von T_1 nach T_2 (siehe Tabelle)

	Vorwärtsschritt	Rückwärtsschritt
Wahrscheinlichkeit	$\sim e^{-\frac{\epsilon+L\theta}{k_B T_1}}$	$\sim e^{-\frac{\epsilon}{k_B T_2}}$
Flügelrad (bei T_1)	$-(\epsilon + L\theta)$	$+\epsilon + L\theta$
Ratsche (bei T_2)	$+\epsilon$	$-\epsilon$
An Masse verrichtete / von Masse geleistete Arbeit	$+L\theta$	$-L\theta$

Im Gleichgewichtsfall (bzw. im Falle einer reversibel arbeitenden Maschine) gilt:

- $\frac{\epsilon+L\theta}{k_B T_1} = \frac{\epsilon}{k_B T_2}$
- Das Verhältnis aus an Flügelrad entnommener (Q_1) und an Ratsche abgegebener (Q_2) Wärme lautet: $\frac{\epsilon+L\theta}{\epsilon} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$
- \Rightarrow Wirkungsgrad: $\eta = \frac{\text{verrichtete Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}} = \frac{L\theta}{L\theta+\epsilon} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \eta_{Carnot}$ (maximaler Wirkungsgrad)

Thermodynamisches und mikroskopisches Ergebnis identisch!

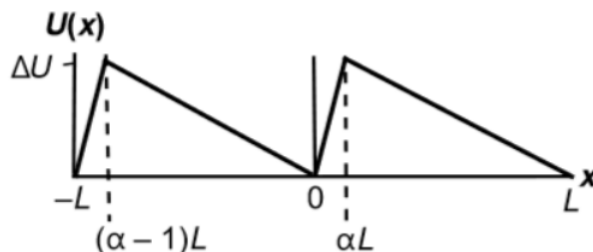
2 Rauschinduzierter Transport

In diesem Kapitel wird zunächst das Verhalten eines Partikels der Masse m in einer thermischen Umgebung der Temperatur T untersucht, sowie die Einflüsse vom zugrundeliegenden Potential $V(x)$ und einer externen Kraft F auf die Bewegung des Teilchens erklärt. Schließlich kann man den gewünschten Effekt einer gerichteten Bewegung des Partikels entgegen einer äußeren Kraft - den „Ratschen-Effekt“ - erklären anhand einiger Beispiele für zeitliche Modulierungen von Potential, Kraft oder Temperatur.

2.1 Vereinfachtes stochastisches Modell

Bewegungsgleichung: $m\ddot{x}(t) + V'(x) = -\eta\dot{x}(t) + \xi(t)$

- Der Trägheitsterm $m\ddot{x}(t)$ ist vernachlässigbar, da die thermischen Fluktuationen dominant ggü. der Trägheit sind.
- Anforderungen an Potential $V(x)$:
 - Räumlich periodisch: $V(x + L) = V(x)$
 - Anisotrop: $\nexists \Delta x$ für welches gilt: $V(-x) = V(x + \Delta x)$
 - Oftmals lässt sich Potential durch eine Sägezahnform näherungsweise darstellen. Diese wird durch Ihre Asymmetrie (Parameter α), ihr Periodizitätslänge L und die Potentialdifferenz ΔV zwischen lokalen Minima und Maxima charakterisiert (siehe Abbildung).



Sägezahn-Potential (Quelle: [1])

- Dynamische Viskosität η : Kopplungsstärke des Partikels mit Umgebungsmedium
- Weißes Rauschen $\xi(t)$:
 - $\langle \xi(t) \rangle = 0$
 - $\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = 2\eta k_B T \delta(t - s)$ (Fluktuations-Dissipations-Relation)

2.2 Fokker-Planck-Gleichung

Einführung der Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x, t)$ für das Teilchen:

- Für $V' = 0$: Diffusionsgleichung (bzw. Langevin-Gleichung)
- Für $\xi(t) = 0$: Liouville-Gleichung für $P(x, t)$ (klassische Hamiltondynamik) \rightarrow „Drift-Term“

\rightarrow Aus der Linearität beider Teile in $P(x, t)$ folgt die Fokker-Planck-Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V'(x)}{\eta} P(x, t) \right)}_{\text{Drift-Term}} + \underbrace{\frac{k_B T}{\eta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t)}_{\text{Diffusions-Term}}$$

Der Driftterm bewirkt dabei eine Bewegung der Wahrscheinlichkeitsverteilung in Richtung von V' und der Diffusionsterm verbreitert die Verteilung.

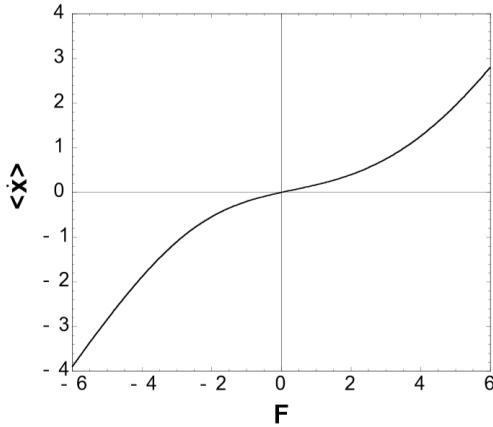
2.3 Teilchenstrom

Kraft $F = 0$:

Aus der Bewegungsgleichung ergibt sich: $\langle \dot{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{V'(x)}{\eta} P(x, t)$ (Da $\langle \xi(t) \rangle = 0$)
 Die Lösung der Fokker-Planck-Gleichung ermöglicht also die Berechnung des Teilchenstroms.
 → Ergebnis: $\langle \dot{x} \rangle = 0$ (Analogon zu Feynman-Ratsche mit $m=0$)

Kraft $F \neq 0$:

Bewegungsgleichung: $\eta \dot{x}(t) = -V'(x(t), t) + F + \xi(t)$
 → Einführung des effektiven Potentials: $V_{eff}(x(t), t) = V(x(t), t) - xF$
 → Ergebnis: Teilchenstrom in Kraftrichtung (aber: gebrochene Symmetrie, siehe unten)



Teilchenstrom für äußere Kraft F (Quelle: [2])

2.4 Ratschen-Typen

Periodische oder stochastische zeitliche Modulation des Potentials (durch $f(t)$) und der Kraft (durch $y(t)$):

$$\eta \dot{x}(t) = -V'(x, f(t)) + \underbrace{F + y(t)}_{\text{modulierte Kraft}} + \xi(t)$$

1. Pulsierende Ratsche: $y(t) = 0 \rightarrow$ Nur Potential wird moduliert
 - (a) „Fluctuating potential“-Ratsche: $V(x, f(t)) = V(x)[1 + f(t)]$
 - (b) „Travelling potential“-Ratsche: $V(x, f(t)) = V(x - f(t))$
2. Kippende Ratsche: $f(t) = 0 \rightarrow$ Nur Kraft wird moduliert
 - (a) „Rocket“-Ratsche: $y(t)$ ist periodisch
 - (b) „Fluctuating force“-Ratsche: $y(t)$ ist stochastisch
3. Temperaturretsche: $y(t) = f(t) = 0 \rightarrow$ Temperatur wird moduliert (Ist im Prinzip sehr ähnlich zu Pulsierender Ratsche!)

2.5 Ratschen-Effekt

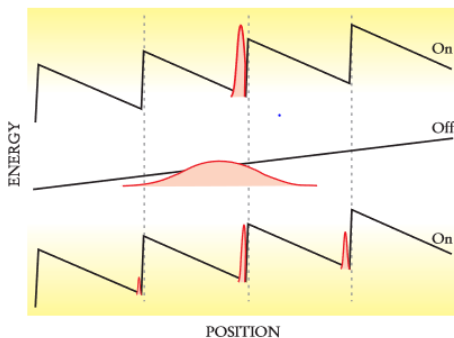
Grundlegendes Prinzip:
 Geschickte Umwandlung von thermischen Fluktuationen in nutzbare Arbeit durch die zeitlichen Modulation äußerer Parameter.

Umsetzung:
 → Wechsel zwischen Diffusionsphasen und Lokalisierungsphasen
 → Die Asymmetrie des Potentials lokalisiert die Teilchendichte mit jedem Durchlauf weiter in Transportrichtung (also **entgegen der Kraftrichtung!**)

Kein Widerspruch zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, da die thermischen Fluktuationen nicht im Gleichgewicht stattfinden.

2.6 Beispiele

„On-Off“-Ratsche: für ein Sägezahnpotential

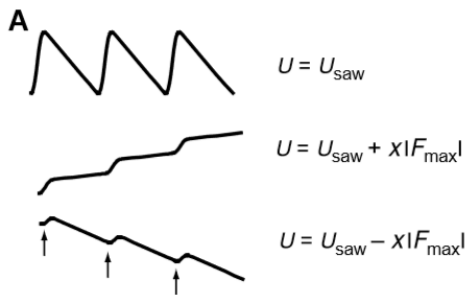


Ratschen-Effekt beim „On-Off“-Potential(Quelle: [4])

- $V(x) \neq 0$ für die Dauer t_{on} : $\rightarrow P(x)$ Lokalisierung hin zum lokalen Potentialminimum findet statt
- $V(x) = 0$ für die Dauer t_{off} : $\rightarrow P(x)$ freie Diffusion mit konstantem Drift $v = \frac{F_{ext}}{\eta}$ in Krafrichtung
- \rightarrow Durch wiederholte Anwendung bewegt sich Teilchen entgegen der externen Kraft
- t_{on} muss ausreichend groß sein, damit Teilchen Minimum erreicht: $t_{on} \gtrsim \frac{\eta L^2}{\Delta V}$
- t_{off} muss genügend klein sein, damit Teilchen nicht zu lange wegdriftet: $t_{off} < \frac{\eta L}{F_{ext}} (\frac{1}{2} - \alpha)$
- Anwendung als Sortiermaschine: Durch Variation von t_{off} kann gewählt werden, für welche Partikel der rauschinduzierte Transport stark genug gegen die äußere Kraft ist oder nicht (z.B.: Gravitationskraft \rightarrow Sortierung nach Masse)

„Rocket“-Ratsche:

- Periodischer Wechsel der Kraft F zwischen $-F_{max}$ und $+F_{max}$
- Für $\frac{\Delta V}{(1-\alpha)L} < F_{max} < \frac{\Delta V}{\alpha L}$ nimmt das effektive Potential im Falle $+F_{max}$ monoton ab und bildet für $-F_{max}$ lokale Minima aus. Es kann hiermit ein Netto-Strom erzeugt werden (siehe Abbildung).

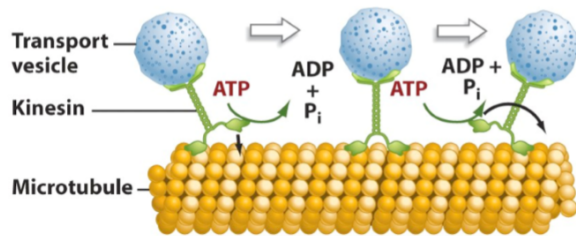


effektives Potential der „Rocket“-Ratsche (Quelle [5])

Temperatur-Ratsche: z.B.: für $T(t) = \bar{T}[1 + A \cdot \text{sgn}(\sin(\frac{2\pi t}{\tau}))]$

- $T(t) = \bar{T}[1 - A] \ll \frac{\Delta V}{k_B}$: Lokalisierung der Partikel in den lokalen Minima
- $T(t) = \bar{T}[1 + A] \gg \frac{\Delta V}{k_B}$: Diffusionsprozess mit Drift
- \rightarrow Netto-Strom entgegen Krafrichtung
- \rightarrow Prinzipiell sehr ähnlich zu pulsierenden Ratschen

Ein solches Vorkommen von einer Temperatur-Ratsche in der Natur ist das Motorprotein Kinesin. Es bewegt sich entlang eines Protein-Filaments. An dieses ist es zunächst einmal fest gebunden. Indem es Adenosintriphosphat (ATP) hydrolysiert wird Wärme frei ($T \gg \frac{\Delta V}{k_B}$), wodurch es über das Bindungspotential diffundieren kann. Anschließend kommt es zu einer Temperaturabnahme ($T \ll \frac{\Delta V}{k_B}$) und das Kinesin ist wieder fest gebunden, hat allerdings einen Schritt nach vorn gemacht (siehe Abbildung).



Bewegung von Kinesin auf einem Microtubulus (Quelle [5])

2.7 Anwendungen

- Molekularer Motor
- Ionenpumpe
- Sortieralgorithmus
- Quantenratsche (z.B.: Bose-Einstein-Kondensat auf „Licht-Potential“)
- SQUID- bzw. Josephson-Vortex-Ratschen

Literatur

- [1] R.D. Astumian; Thermodynamics and Kinematics of a Brownian Motor; Science 276, 917 (1997)
- [2] P. Reimann; Brownian motors: noisy transport far from equilibrium; Physics Report 361, 57-265 (2002)
- [3] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands; The Feynman Lectures on Physics; Addison Wesley (2007)
- [4] R.D. Astumian, P. Hänggi; Brownian Motors; Physics Today 55 (2002), Nr.11, 33
- [5] M. Tomic, D. v. Treeck; Brownsche Motoren, Institut für Theoretische Physik; TU Berlin
- [6] Z C Tu; Efficiency at maximum power of Feynman's ratchet as a heat engine; Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 41 312003 (2008)
- [7] R.D. Astumian; Molekulare Motoren; Spektrum d. Wissenschaft 1 / 2002, Seite 36