Handout zum Vortrag über Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen, Potential- und Wirbelströmungen von Niels Bracher.

1 Ideale Fluide

1.1 Kontinuitätsgleichung

Die „hydrodynamische" Kontinuitätsgleichung beschreibt die **Massenerhaltung** eines strömenden Fluides. Für diese muss gelten, dass die durch die Oberfläche eines infinitesimal kleinen Würfels[1] heraus fließende Flüssigkeitsmenge der Abnahme der Fluidmasse im Würfel entspricht:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1}$$

Hierbei ist $\rho \mathbf{v} = \mathbf{j}$ der *Stromdichtevektor*. Sie gilt auch für viskose Fluide. Für inkompressible Fluide mit $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$ können wir daraus die Inkompressibilitätsbedingung herleiten:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

1.2 Euler-Gleichungen des idealen Fluids

Die Euler-Gleichungen[2] sind die Impulsgleichungen der Hydrodynamik idealer Fluide. Sie beschreiben deren räumliche und zeitliche Entwicklung und bilden den Übergang von Statik zur Dynamik. Dieser Übergang wird durch das Hinzufügen von Trägheitswiderständen zu den äußeren Kräften beschrieben, die hier als Druckkräfte angesetzt werden:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} \tag{3}$$

Und im Schwerefeld, bei dem auf jede Volumeneinheit zusätzlich die Kraft $\rho \mathbf{g}$ wirkt:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} \tag{4}$$

1.3 Adiabatengleichung

Zur vollständigen Beschreibung des hydrodynamischen Systems einer idealen Flüssigkeit benötigen wir die Adiabatengleichung. Da bei idealen Fluiden zwischen den

[1] Hiermit ist ein Volumenelement gemeint, was klein genug im Vergleich zum betrachteten Körper ist, jedoch hinreichend groß, um einer Kontinuumsbeschreibung zu genügen.

[2] Leonhard Euler (*1707;†1783) veröffentlichte diese Gleichungen 1757.

Teilchen kein Wärmeaustausch und keine Viskosität vorhanden ist, lässt sich die Bewegung der Teilchen als adiabatisch beschreiben. Das wiederum hat zur Folge, dass die gesamte Bewegung des Fluids adiabatisch sein muss. Definieren wir hier s als *Entropie pro Masseneinheit* so können wir folgende Bedingung an die adiabatische Bewegung stellen, die **Adiabatengleichung**:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, s = 0 \tag{5}$$

, sodass die Entropie jedes Flüssigkeitselements bei der Bewegung im Raum unverändert bleibt.

Isentrope Bewegung

Für Fluide in denen die Entropie zu einem beliebigen Zeitpunkt $t_0 = 0$ in allen Raumpunkten gleich war, vereinfacht sich die Adiabatengleichung zu

$$s\,(\mathbf{r}, t) = \text{konstant}\,\forall t \tag{6}$$

In diesem Fall können wir die Euler-Gleichungen für die isentrope Bewegung aufstellen:

$$\partial_t\,(\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \tag{7}$$

Diese sind nur noch von der Geschwindigkeit $\mathbf{v}\,(\mathbf{r}, t)$ abhängig. Als Randbedingung die für die Bewegung des Fluids in der Nähe einer Wand erfüllt sein muss gilt, dass die Normalenkomponente der Fluidgeschwindigkeit gleich der Normalenkomponente der Wandgeschwindigkeit entspricht.

1.4 Zirkulation

Zur Vereinfachung der Helmholtz'schen Wirbeltheorie führen wir das von Thomson definierte Linienintegral ein, welches als Zirkulation bezeichnet:

$$Z = \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \tag{8}$$

Die Integration erstreckt sich dabei über eine geschlossene Kurve C innerhalb des Fluides, welche an den Fluidteilchen haftet und mit diesen mitschwimmt. Der *Thomson'sche Wirbelsatz* sagt nun aus, dass die Zirkulation über eine beliebige, geschlossene Kurve von Fluidteilchen, bei der Strömung ihren Anfangswert beibehält - die Zirkulation ist erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0 \;\Rightarrow\; Z = \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \text{konstant} \tag{9}$$

In der Herleitung haben wir uns auf ein isentropisch strömendes ideales Fluid (insbesondere ist dieses viskositätsfrei) beschränkt.

1.5 Potentialströmung

Als Potentialströmung wird *im Allgemeinen*, eine bis auf singuläre Punkte oder Linien *wirbelfreie Strömung* bezeichnet. Eine Potentialströmung liegt aber auch dann vor, wenn wir aufgrund der Bedingung der Wirbelfreiheit:

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{v} = 0 \tag{10}$$

die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ als Gradienten eines skalaren Feldes, dem *Geschwindigkeitpotential* Φ schreiben können:

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi \tag{11}$$

Wobei ζ als Wirbelung oder Wirbelstärke bezeichnet wird. Beide Bedingungen sind äquivalent und charakterisieren eine Potentialströmung. Außerdem folgt aufgrund der Wirbelerhaltung, dass eine Potentialströmung eine solche für alle Zeiten bleibt. Dabei haben wir die Annahmen eines isentropisch strömenden, idealen Fluides getroffen.

1.5.1 Euler-Gleichungen zur Beschreibung der Potentialströmung

Die Euler-Gleichungen dienen auch hier zur dynamischen Beschreibung des Systems. Ausgehend von den Euler-Gleichungen im Schwerefeld bei einer isentropen Bewegung sowie der Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Potential können wir schreiben:

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + w + U \right) = \mathbf{0} \tag{12}$$

Integrieren wir diese Gleichung so erhalten wir die Bernoulli-Gleichung für eine instationäre Strömung:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = 0 \tag{13}$$

wobei wir die Beziehung $w = \frac{p}{\rho}$ verwendet haben.

1.5.2 Potentialströmung eines inkompressiblen Fluids

Untersuchen wir das Verhalten einer inkompressiblen Potentialströmung erhalten wir unter Verwendung der Inkompressibilitätsbedingung die Laplace-Gleichung:

$$\Delta\Phi = 0 \tag{14}$$

Randbedingungen für diese sind:

$$v_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \tag{15}$$

Lösung der Laplace-Gleichung werden als *harmonische Funktionen* bezeichnet.

1.6 Wirbelströmung

Im Gegensatz zur Potentialströmung gilt hier:

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{v} \neq 0 \tag{16}$$

Um Wirbelströmungen beschreiben zu können führen wir die Helmholtz-Zerlegung durch, sodass rotationsfreie $\mathbf{v}^{(\phi)}$ von quellfreien $\mathbf{v}^{(\zeta)}$ Strömungen getrennt werden:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(\zeta)} + \mathbf{v}^{(\phi)} \tag{17}$$

mit den Bedingungen:

$$\nabla \times \mathbf{v}^{(\phi)} = 0 \text{ und } \nabla \cdot \mathbf{v}^{(\zeta)} = 0 \tag{18}$$

Analog zur Elektrodynamik findet man hier Lösungen mittels beispielsweise des Green'schen Satzes.

2 Navier-Stokes-Gleichungen zur Beschreibung viskoser Fluide

Hier spielt vor allem der Impulübertrag zwischen FLuidteilchen eine Rolle. Schnellere Fluidteilchen beschleunigen langsamere und umgekehrt. Daraus resultierend ist eine Reibung bzw. eine *Zähigkeit* der Flüssigkeit, welche diese kurzreichweitige Wechselwirkung beschreibt. Mathematisch können wir die Wechselwirkung durch den *Reibungstensor für kompressible Fluide* ausdrücken:

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \delta_{ik} \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \tag{19}$$

$\eta > 0$ ist dabei die *dynamische Viskosität* und $\zeta > 0$ der Zähigkeitskoeffizient. Die Divergenz angewandt auf den Reibungstensor und als Summand an die Euler-Gleichungen geschrieben liefert die Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \mathbf{f} \tag{20}$$

wobei $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ die *kinematische Viskosität* ist. Das Vektorfeld $\mathbf{f}$ beschreibt zusätzliche, zu Kräften gehörende Beschleunigungsterme. Beispiele dafür sind die Erdbeschleunigung oder bei sehr großen Systemen die Corioliskraft.

Literatur

Adams, N. (2015). *Einführung in die dynamik der fluide.* (Vorlesungsskript zur Fluidmechanik der TU München)

Durst, F. (2006). *Grundlagen der strömungsmechanik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Ewerz, C. (2016). *Klassische elektrodynamik.* (Vorlesungsskript zur theoretische Physik der Universität Heidelberg)

Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1987). *Course of theoretical physics* (Bd. VI: Fluid Mechanics). Pergamon Books Ltd.

Sommerfeld, A. (1945). *Vorlesung über theoretische physik* (Bd. II: Mechanik der deformierbaren Medien). Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler.

Wolschin, G. (2016). *Hydrodynamik*. Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-662-48024-3