

Schwerewellen im Wasser und
Machsches-Phänomen
im Rahmen des Seminars Mechanik

Simon Lüdke
bei Professor Mielke

26. Januar 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Ebene Wellen	3
1.1 Wellen in der Tiefwassernäherung	3
1.2 Flachwasserwellen	5
1.3 Wellen in mitteltiefem Wasser	6
2 Wellenentstehung - Wellentypen	6
2.1 Windwellen	6
2.2 Ringwellen	7
2.3 Tsunami	8
3 Schiffswellen und Machsches-Phänomen	9
3.1 Schiffswellen	9
3.2 Machsches-Phänomen	12
3.3 Unterschiede in der Behandlung	12
4 Quellen	12
4.1 Hauptquelle zu Schwerewellen und Schiffswellen	12
4.2 Kelvin-Helmholz-Instabilität	13
4.3 Schiffswellen	13
5 Noch zu beantwortende Fragen	13

1 Ebene Wellen

Wir wollen uns zunächst mit der einfachsten Wellenform, der ebenen Welle, mit nur einer Ausbreitungsrichtung beschäftigen. Das Geschwindigkeitspotential kann hierbei mit Hilfe des d'Alembert'schen Lösungsansatzes

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(f(x + iy) + f^*(x - iy))$$

sowie einer Exponentialfunktion $e^{-i\omega t}$, welche die Zeitabhängigkeit der Schwingung ausdrückt, beschrieben werden. Es ergibt sich:

$$\Phi = A \cdot e^{i(kx - \omega t)} e^{-ky} + B \cdot e^{i(kx - \omega t)} e^{ky} \quad (1)$$

Für eine vollständige Beschreibung der Wellenbewegung ist es wichtig, das Verhältnis zwischen Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ zu kennen, wobei λ die Wellenlänge und τ die Periodendauer ist. Aus diesen Definitionen folgt jetzt direkt die Formel für die Phasen- oder Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle:

$$V = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\omega}{k} \quad (2)$$

Dies ist besonders wichtig, da sowohl A, B als auch ω von der Anregung abhängen und daher frei wählbar sind.

1.1 Wellen in der Tiefwassernäherung

Wir nehmen nun an, dass die Wassertiefe $h \gg \lambda$ ist und daher der Term e^{ky} am Boden (also für $y = h$) divergiert. Da das unendliche Geschwindigkeitsamplituden am Boden bedeuten würde, muss für eine sinnvolle Behandlung die Gleichung des Geschwindigkeitspotentials reduziert werden.

$$\Phi = A e^{i(kx - \omega t)} e^{-ky} \quad (3)$$

Wir verwenden nun die Bernoullische Gleichung :

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(-\nabla \Phi) + \frac{1}{\rho}(p + U) = F(t) = 0 \quad (4)$$

Da $(\nabla \Phi)^2$ für (3) wegfällt, ergibt sich:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{\rho}(p + U) \quad (5)$$

Wir normieren den Atmosphärendruck an der Wasseroberfläche zu $p_A = 0$, fügen aber, um uns zu sparen es gesondert zu behandeln, den Druck, welcher durch die Oberflächenspannung entsteht p_O hinzu. Damit ergibt sich insgesamt für den Druck:

$$p = p_A + p_O = T \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (6)$$

In der Druckformel taucht nun die Oberflächensenkung η auf.

$$\eta = a \cdot e^{i(kx - \omega t)} \quad (7)$$

U ist das Potential der äußeren Kraft, in diesem Fall also das Gravitationspotential $U = -\rho g \eta$.

Setzt man nun (7) in (6) und das zusammen mit dem Gravitationspotential und (3) in (5) ein, so ergibt sich:

$$i\omega A = a\left(\frac{Tk^2}{\rho} + g\right) \quad (8)$$

Es ist gelungen, eine Beziehung zwischen der Amplitude des Geschwindigkeitspotentials A und der Amplitude der Oberflächensenkung a herzustellen.

Um das fehlende Verhältniss von ω und k zu finden, verwenden wir die Annahme, dass die Bewegung der Wasseroberfläche B_n gleich der Bewegung der Wasserteilchen an der Oberfläche senkrecht zur Oberfläche v_n sind. Solange die Wellenhöhe viel kleiner als die Wellenlänge ist, kann man die Oberflächennormale durch die y -Richtung nähern. Daher gilt:

$$B_n = \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_n \quad (9)$$

Setzt man in (9) jetzt (3) und (7) ein, ergibt sich:

$$-i\omega a = kA \quad (10)$$

Aus (8) und (10) folgt:

$$\frac{A}{a} = \frac{\left(\frac{Tk^2}{\rho} + g\right)}{i\omega} = -\frac{i\omega}{k} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \left(\frac{Tk^2}{\rho} + g\right) k \quad (12)$$

Wenn man das in (2) einsetzen, erhält man das gesuchte Verhältnis in Form der Phasengeschwindigkeit.

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{Tk}{\rho} + \frac{g}{k}} \quad (13)$$

Bei sehr kleinen Wellenlängen überwiegt der Kapillarwellenanteil, welcher aus der Oberflächenspannung resultiert und in welchem die Geschwindigkeit mit $v \propto \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ abnimmt. Mit zunehmender Wellenlänge nimmt die Bedeutung des Schwerewellentems zu, welcher mit $v \propto \sqrt{\lambda}$ geht. Wie man in Abbildung 1 sehen kann, gibt es keine Wasserwellen mit einer Geschwindigkeit von unter $0.231 \frac{m}{s}$. Sowohl die Wellen mit Wellenlänge größer als auch kleiner $\lambda = 1.7cm$ breiten sich schneller aus.

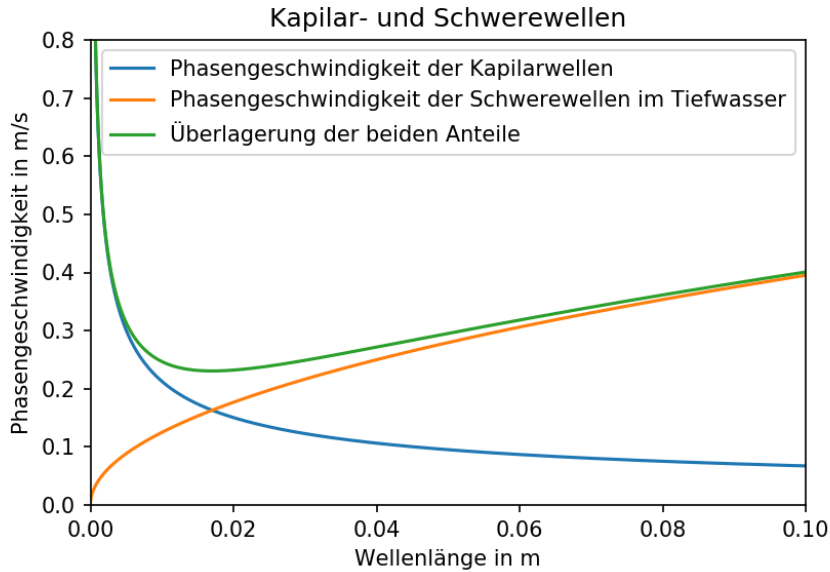


Abbildung 1: Geschwindigkeitsverlauf von Schwere- und Kapilarwellen

1.2 Flachwasserwellen

Da man sieht, dass die Oberflächenspannung nur bei kleinen Wellenlängen relevant ist, lässt sie sich hier, unter der Voraussetzung $\lambda > h$, sowie auch im nächsten Kapitel bei $\lambda \approx h$ vernachlässigen. Daher setzen wir jetzt $p = 0$ und, da $hk \ll 1 \Rightarrow e^{ky} < \infty$ ist, müssen wir (1) anstatt (3) verwenden. Deshalb führen wir nun eine neue Bedingung ein. Die Geschwindigkeit in y -Richtung muss am Boden verschwinden, da das Wasser nicht in den Boden eindringen kann.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0|_{y=h}$$

Setzt man das nun in (1) ein, so lässt sich eine Konstante C definieren, sodass

$$\frac{1}{2}C = Ae^{-kh} = Be^{kh} \quad (14)$$

gilt. Daraus folgt:

$$\Phi = \frac{C}{2} e^{i(kx - \omega t)} (e^{k(h-y)} + e^{-k(h-y)}) = \frac{C}{2} e^{i(kx - \omega t)} \cosh(k(h-y)) \quad (15)$$

Wir definieren die Oberflächensenkung wie in (7), nur benennen wir die Amplitude um, sodass $\eta = c * e^{i(kx - \omega t)}$ Aus (8)

$$\Rightarrow i\omega C \cosh(kh) = gc \quad (16)$$

und aus 10

$$\Rightarrow -i\omega c = Ck \sinh(kh) \quad (17)$$

Wir können $kh \ll 1$ nutzen, sodass $\sinh(kh) = kh$ und $\cosh(kh) = 1$ folgt. Damit ergibt sich dann:

$$\frac{C}{c} = \frac{g}{i\omega} = -\frac{i\omega}{k^2h} \quad (18)$$

und final folgt daraus

$$V = \sqrt{gh} \quad (19)$$

Wenn die Wellenlänge größer als die Wassertiefe wird, schmiegt sich die Geschwindigkeit also an den Grenzwert $V_{max} = \sqrt{gh}$ an.

1.3 Wellen in mitteltiefem Wasser

Die Annahme, die diesem letzten Abschnitt zugrunde liegt, ist

$$h \approx \lambda$$

Wir können (16) und (17) verwenden, dürfen jedoch nicht wie zuvor nähern weshalb

$$\frac{C}{c} = \frac{g}{i\omega \cosh(kh)} = -\frac{i\omega}{k \sinh(kh)} \quad (20)$$

daher ist

$$\tanh(kh) = \frac{\omega^2}{gk} \quad (21)$$

und daraus folgt

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \quad (22)$$

Für $h \gg \lambda$ ergibt sich hier wieder (13) und für $h \ll \lambda$, (19). Eine weitere Möglichkeit die Geschwindigkeit zu beschreiben, besteht darin die beiden Terme in (21) nach kh graphisch dazustellen und mit dem daraus bestimmten Schnittpunkt ξ_0 die Geschwindigkeit als

$$V = \frac{\omega h}{\xi_0} \quad (23)$$

zu schreiben.

2 Wellenentstehung - Wellentypen

2.1 Windwellen

Die Kelvin-Helmholz-Instabilität besagt, dass bei Relativbewegung zweier Materialschichten zueinander, Störungen verstärkt werden. Existieren bereits kleinere Erhebungen auf der Oberfläche, über die der Wind streicht, so bewegen sich die Luftteilchen über diesen Erhebungen schneller als in den Senken davor oder dahinter. Aufgrund des Bernoulli-Effekts sinkt der Druck bei größerer Relativbewegung, weswegen ein Druckgradient entsteht, welcher zu Vertiefung der Senkungen und zu einem weiteren Aufbau der Erhebungen führt. Da der Wind vereinfacht gesehen eine konstante Richtung hat, sind Windwellen ebene Wellen, wie wir sie bereits in 1 besprochen haben.



Abbildung 2: Ringwelle - Quelle: https://www.leifiphysik.de/sites/default/files/medien/mechanischewelle_o_verview.jpg

2.2 Ringwellen

Wenn eine Welle nicht über eine große Fläche angeregt wird, wie das bei den Windwellen der Fall ist, sondern die Anregung nur in einem Punkt stattfindet, so breiten sich die Wellen nicht nur in eine Richtung aus, sondern es entstehen Ringwellen mit dem Anregungspunkt im Mittelpunkt. Ein sehr bekanntes Beispiel für diesen Fall sind die Wellen, welche entstehen, wenn man einen Stein in einen See wirft. Wir werden aber im Folgenden noch weitere Anwendungen behandeln.

Da die Herleitung in diesem Fall sehr langwierig ist, möchte ich bei bestehendem Interesse auf "Mechanik deformierbarer Medien" von A.Sommerfeld (4.1) verweisen.

Wenn ich schon nicht die Herleitung bieten kann, so möchte ich doch kurz versuchen, das Ergebniss zu erklären. Als Auslöser der Wellenbewegung kann man sich einen Stempel vorstellen, welcher bei $t_0 = 0$ aus dem Wasser herausgezogen wird und den Radius r_0 hat. Wir betrachten im Folgenden nur die Oberflächen-senkung η der Welle, da diese für die sichtbaren Phänomene relevant ist. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist identisch mit der der ebenen Wellen (für die Herleitung wird in diesem Fall die Annahme von Tiefwasser 1.1 verwendet). Sei V_0 das zu Beginn verdrängte Volumen, r der Abstand vom Wellenursprung und t die seit t_0 vergangene Zeit, so gilt für die Obeflächensenkung:

$$\eta = \frac{V_0}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot r^2} \cdot u \cdot e^{-iu}, \text{ wobei } u = \frac{g \cdot t^2}{4r} \text{ ist.} \quad (24)$$

Für den Realteil gilt also:

$$\eta = \frac{V_0}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot r^2} \cdot u \cdot \cos(u) \quad (25)$$

Mit wachsendem Abstand nimmt die Wellenamplitude also mit $\frac{1}{r^3}$ ab. Die Wellenlänge und somit der Abstand zweier Wellenberge folgt, wie leicht zu berech-

Tiefe (m)	Geschwindigkeit (km/h)	Wellenlänge (km)
10	36	10,6
50	79	23
200	159	49
2000	504	151
4000	713	213
7000	943	282

Abbildung 3: Tsunamigeschwindigkeiten und Wellenlängen bei unterschiedlichen Tiefen - Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Tsunami>

nen ist, der Gleichung:

$$\lambda(r, t) = \Delta r = \frac{8\pi}{g} \frac{r^2}{t^2} \quad (26)$$

Sie nimmt also bei fester Zeit quadratisch mit dem Abstand zu und bei festem Abstand quadratisch mit der Zeit ab.

2.3 Tsunami

Einen interessanten und bekannten Spezialfall der Schwerewellen bilden Tsunamis. Die meist durch Erdbeben ausgelösten Wellen heben sich besonders dadurch von anderen Wasserwellen ab, dass die gesamte Wassersäule in Schwingung gerät und die Wellenausbreitung daher unabhängig der Wassertiefe durch die Flachwasser-Näherung beschrieben werden kann. Dies folgt u.a. daraus, dass Tsunamis abhängig von der Tiefe sehr große Wellenlängen haben können (vergleiche Abbildung 3). Nach (19) ergibt bei einer durchschnittlichen Ozeantiefe von $3680m$ eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von $v \approx 700km/h$. Mit abnehmender Meerestiefe nimmt auch die Geschwindigkeit ab, weshalb die Wellen aufeinander auflaufen und die Wellenlänge auf $\lambda \approx 10km$ abnimmt.



Abbildung 4: Photographie des Wellenbildes hinter Kriegsschiffen - Quelle: <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m309-01a/carmen/jfkub.jpg>

3 Schiffswellen und Machsches-Phänomen

3.1 Schiffswellen

Das charakteristische Wellenbild von Schiffswellen ist erklärbar, wenn man das Schiff als einen beweglichen Punkt annimmt, in dem stetig neue Ringwellen entspringen, welche dann untereinander interferieren. Wir betrachten dazu die Oberflächensenkung/Erhebung

$$\eta = \beta \int_{-\infty}^0 \eta_t dt \quad (27)$$

Wobei η_t die Erhebungen zu früherem Zeitpunkten sind und β einer reziproken Zeit entspricht ($\beta = v/\sqrt[3]{V_0}$). Zusammen mit (24) ergibt sich:

$$\eta = C \int_{-\infty}^0 \frac{1}{r_t^2} u_t e^{-iu_t} dt, \quad C = \frac{V_0^{2/3} v}{\sqrt{2\pi}} \quad (28)$$

Wir verwenden in der Abbildung 5 den Kosinussatz und da t negativ ist, folgt:

$$r_t^2 = r^2 + (vt)^2 + 2vtr \cdot \cos(\theta) \quad (29)$$

Mit u aus (24) sagen wir

$$u_t = \frac{g t^2}{4 r_t} = f(t)$$

Wir suchen für $u \gg 1$ die Lösung von $f'(t) = 0$ und erhalten:

$$t_1 = -\frac{3r}{2v} \left(\cos(\theta) - \sqrt{\cos^2(\theta) - \frac{8}{9}} \right) \quad (30)$$

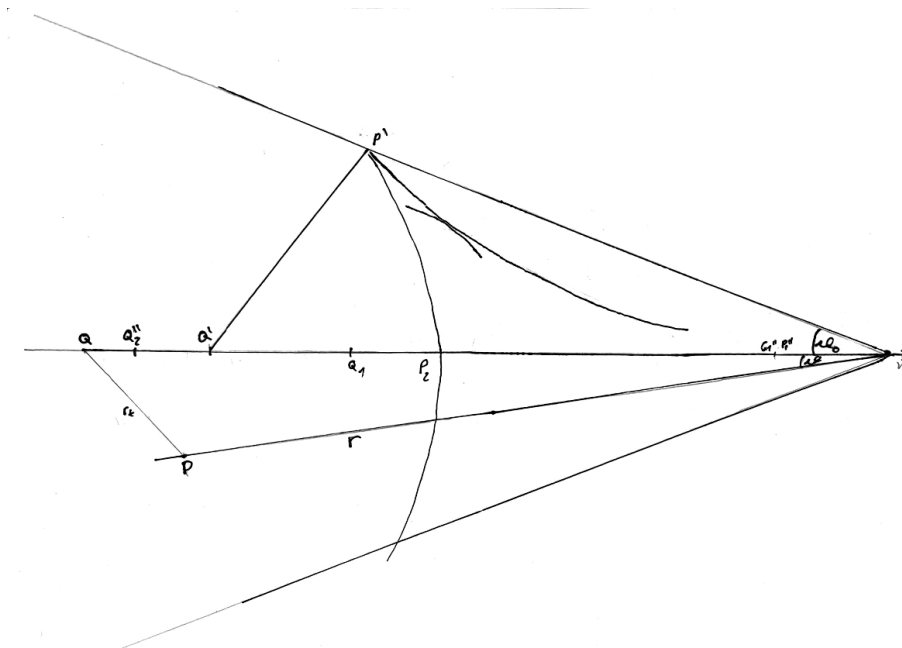


Abbildung 5: Handskizze der Wellenkonstruktion von Schiffswellen nach A.Sommerfeld S.181

und

$$t_2 = -\frac{3}{2} \frac{r}{v} \left(\cos(\theta) + \sqrt{\cos^2(\theta) - \frac{8}{9}} \right) \quad (31)$$

Damit die Zeiten das Integrationsgebiet von (28) erfüllen, müssen sie reell sein.

$$\cos^2(\theta) > \frac{8}{9} \Rightarrow \theta < \theta_{max} = 19.47^\circ$$

Bei $\theta = \pm\theta_{max}$ wird das Wellenbild durch zwei Geraden begrenzt. Dies entsteht anschaulich daher, dass diese die Grenze des zeitlich möglichen Wellenfortschreitens sind.

Um die restlichen Wellenmuster zu verstehen, wollen wir Abbildung 5 betrachten. Für unsere bisherigen Berechnungen haben wir einen Erzeugerpunkt Q, an welchem das Schiff zum Zeitpunkt $-t$ war, den Aufenthaltsort des Schiffes (O), welches um $v \cdot t$ weitergefahren ist und einen Punkt P im Abstand r zu O gewählt.

Wählt man sich nun einen Punkt P' auf der Geraden mit $\theta = \theta_{max}$ und beliebigen Abstand r' vom Schiff, so ist $t_1 = t_2$ und der Abstand des Punktes an dem die Welle erzeugt wurde (Q') zum Schiff ist:

$$-vt_1 = -vt_2 = \frac{3}{2} r' \cos(\theta_0)$$

Zieht man jetzt um Q' einen Kreis durch P' , so bekommt man eine Linie gleicher Phase, die die charakteristischen Querwellen definiert.

Für $\theta < \theta_{max}$ wird $-v \cdot t_2$ immer größer, weshalb Q' von O wegwandert bis

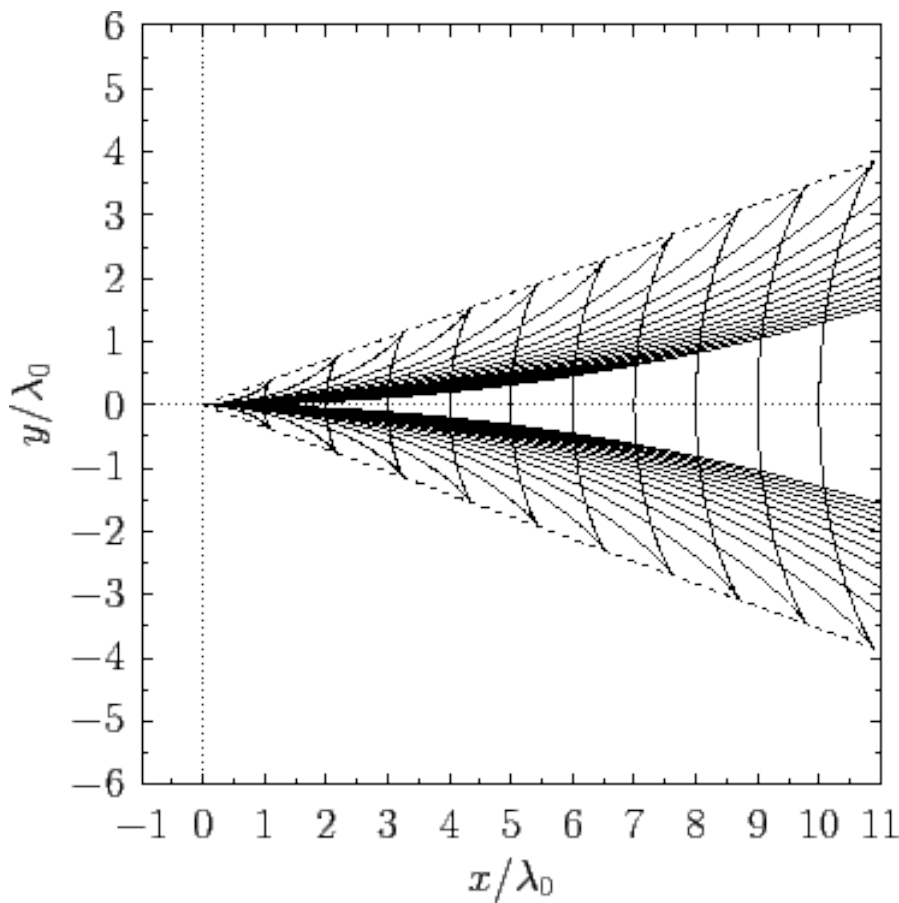


Abbildung 6: Skizze des Wellenbildes hinter einem Schiff - Quelle: [http : //farside.ph.utexas.edu/teaching/315/Waves/node70.html](http://farside.ph.utexas.edu/teaching/315/Waves/node70.html)

es bei $\theta = 0$ zu Q_2'' wird. Zieht man von Q_2'' einen Kreis durch den Punkt, an dem der vorherige Kreisbogen die Fahrtrichtung schneidet, so ist die neue Kurve weniger gekrümmt. Wenn alle für $0 < \theta < \theta_{max}$ erzeugten Wellen miteinander interferieren, so führt dies dazu, dass die Querwelle gerader ist, als die erste Bestimmung angibt.

Gleichzeitig wird $-v \cdot t_1$ immer kleiner, weshalb ein anderer Wellenursprung Q_1 von Q' in Fahrtrichtung wandert und final bei $\theta = 0$ zu Q_1'' wird. Den in den Punkten Q_1 erzeugten Wellen entsprechen Punkte P_t immer näher an der Fahrtrichtung und somit werden die Kreistangenten in den Punkten P_n immer flacher. Nahe am Schiff nähert sich also die Längswellenlinie, die in P beginnt, an die Fahrtrichtung des Schiffes an, jedoch treffen die verwendeten Näherungen für die nahe Umgebung des Schiffes nicht zu. Dies liegt daran, dass wir zuvor u als groß genähert haben, unsere Näherung kleine Zeiten t also nicht beschreibt.

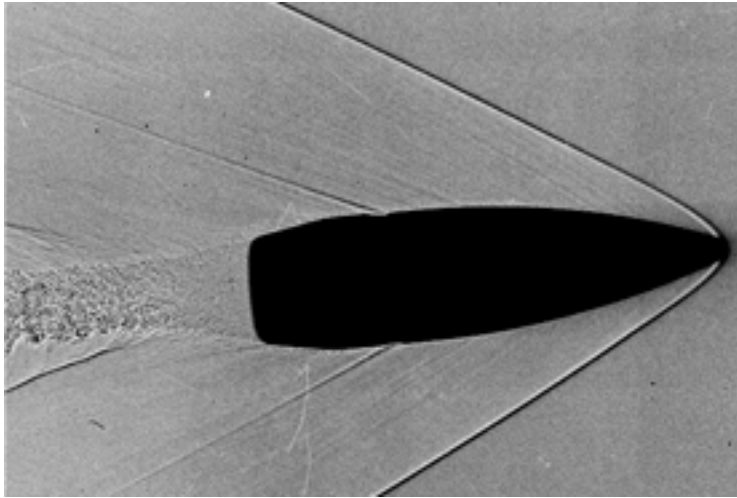


Abbildung 7: Machscher-Kegel eines Projektils - Quelle [http : //www.laermorama.ch/m1_a_kustik/bilder/machscher_kegel.jpg](http://www.laermorama.ch/m1_a_kustik/bilder/machscher_kegel.jpg)

3.2 Machsches-Phänomen

Das Machsche-Phänomen beschreibt den Wellenkegel (Abbildung 7), den Kompressionswellen hinter einem mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Geschoss bilden. Die Kompressionswellen breiten sich einheitlich mit der Schallgeschwindigkeit c aus, sodass der Kegel einen Radius $r = ct$ und einen Öffnungswinkel

$$\sin\phi = \frac{c}{v}$$

hat, welcher mit größerer Geschosseschwindigkeit v abnimmt.

3.3 Unterschiede in der Behandlung

Gerade im Kontext des geschwindigkeitsabhängigen Machschen-Kegels, erscheint der von der Schiffgeschwindigkeit unabhängige Ausbreitungswinkel zunächst paradox. Das scheinbare Problem löst sich auf, wenn man bedenkt, dass die Geschwindigkeit der Wasserwellen nach (13) von der Wellenlänge abhängt. Es gibt also Wellen, die mit dem Schiff mitlaufen, während das Geschoss alle Schallwellen überholt. Dies führt, wie mathematisch gezeigt werden kann, zu destruktiver Interferenz ausserhalb des Grenzwinkels.

Wenn wir anstatt der Tiefwassernäherung die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Flachwasser (19) zugrunde legen, bekommen wir auch hier eine dispersionslose Relation und die Schiffswellen verhalten sich genau wie der Machsche-Kegel.

4 Quellen

4.1 Hauptquelle zu Schwerewellen und Schiffswellen

- Arnold Sommerfeld, Mechanik der deformierbaren Medien, 6. Auflage, Harri Deutschverlag Thun, Frankfurt/M 1978

- <https://thayer.dartmouth.edu/d30345d/books/EFM/chap4.pdf>
- <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/315/Waves/node70.html>
- Michel Rieutord, Fluid Dynamics, Springer Heidelberg 2015
- L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Hydrodynamik, Akademie Verlag, Berlin 1991
- <https://www.youtube.com/watch?v=qgamfo86FQo>
- <https://de.wikipedia.org/wiki/Kelvin-Helmholtz-Instabilit>
- Entstehung und Ausbreitung von Schiffswellen in Binnen- und Küstengewässern, Dissertation von Rupert Henn an der Universität Duisburg-Essen 2008
- <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/315/Waves/node70.html>