Prof. Manfred Salmhofer

# MMP 1

SS 2016

## Übungsblatt 1

**1. Kurven.** Stellen Sie fest, ob die folgenden parametrisierten Kurven $\gamma$ und $\gamma'$ dieselbe orientierte Kurve definieren:

(**a**) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 5\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}$ und $\gamma' : [-1,0] \to \mathbb{C}$, $\gamma'(t) = 5\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}$
(**b**) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 5\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}$ und $\gamma' : [-1,0] \to \mathbb{C}$, $\gamma'(t) = 5\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}t}$
(**c**) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 5\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}$ und $\gamma' : [0,2] \to \mathbb{C}$, $\gamma'(t) = 5\,\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}t}$
(**d**) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 5\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}$ und $\gamma' : [0,4] \to \mathbb{C}$, $\gamma'(t) = 5\,\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}t}$ .

**2. Endlich zerlegbare Mengen.** Stellen Sie fest, welche der folgenden Mengen endlich zerlegbar sind (und geben Sie in diesem Fall eine geeignete Zerlegung an).

(**a**) $R = \{x \in \mathbb{R}^2 : a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2\}$, für $0 < a < b$.
(**b**) $U = \{z \in \mathbb{C} : \ \arg z \in (0, \frac{\pi}{7})\}$
(**c**) $\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) : 0 < r < 1 + \cos\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]\}$

**3.** Stellen Sie fest, ob

$$(9x^2 - 3y^2 - 9 + 10x)y$$

der Imaginärteil einer holomorphen Funktion von $z = x + \mathrm{i}y$ sein kann.

**4. Wirtingerkalkül.** Es sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $z = x + \mathrm{i}y$, die Funktionen $(x, y) \mapsto u(x, y)$ und $(x, y) \mapsto v(x, y)$ differenzierbar im Punkt $(x_0, y_0)$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, und $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$. Zeigen Sie:

(**a**) Die Differenz $f(z) - f(z_0)$ kann geschrieben werden als

$$f(z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,(z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\,\overline{(z - z_0)} + o(|z - z_0|)$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

(**b**) es gilt

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{4}\Delta$$

wobei $\Delta$ der Laplaceoperator ist.

(**c**) Die Jacobi'sche Determinante von $f$ ist

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|^2$$

Abgabetermin 29.4.2016, vor der Vorlesung