Theoretische Physik 4 (Quantentheorie)

Sommersemester 2014

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1: Störungstheorie und Variationsprinzip

Der Hamiltonoperator des eindimensionalen anharmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) + \lambda x^4$$

mit reellem λ.

(a) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie in Störungstheorie zu zweiter Ordnung in λ.

(b) Verwenden Sie einen Variationsansatz von Gauß'scher Form

$$\psi(x) = N \mathrm{e}^{-(b/2)x^2} ,$$

um eine Näherung für die Grundzustandsenergie zu finden.

(c) Was passiert für $\lambda < 0$?

6 Punkte.

Aufgabe 10.2: Komplexe (2×2) - Matrizen & Pauli-Matrizen

Gegeben sei eine komplexe (2×2) - Matrix $H \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ mit $H = H^\dagger$.

(a) Geben Sie die allgemeine Form von H an.

(b) Zeigen Sie, daß die Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zusammen mit der (2×2) - Einheitsmatrix eine Orthonormalbasis des $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ bilden, und geben Sie die Darstellung von H bezüglich dieser Basis an.

6 Punkte.

Aufgabe 10.3: Pauli-Matrizen

Aus der obigen Aufgabe ist bekannt, daß die Pauli-Matrizen eine Orthonormalbasis des $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle A \mid B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger B)/2$ bilden.

(a) Bestimmen Sie aus der daraus folgenden Gleichung $\sigma_k^2 = \mathbb{1}_{2\times 2}$, $k = 1, 2, 3$, die Eigenwerte der σ_k.

(b) Zeigen Sie, daß die Pauli-Matrizen die folgende Beziehung erfüllen:

$$\sigma_k \, \sigma_\ell + \sigma_\ell \, \sigma_k = 2 \, \delta_{k\ell} \, \mathbb{1}_{2\times 2} \quad \forall k, l \in 1, 2, 3 \, .$$

(c) Seien $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ beliebige Vektoren. Zeigen Sie:

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbb{1}_{2\times 2} \, \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} + \mathrm{i} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \, .$$

(d) Zeigen Sie, daß für $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0)$ gilt:

$$e^{\mathrm{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \left(\cos \alpha + \mathrm{i} \, \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\alpha} \sin \alpha \right) \mathbb{1}_{2\times 2} \qquad \text{mit} \;\; \alpha = |\boldsymbol{\alpha}| \, .$$

8 Punkte.

Abgabe am 01.07.2014 vor Beginn der Vorlesung. Viel Erfolg!