Theoretische Physik 4 (Quantentheorie)

Sommersemester 2014

Übungsblatt 2

In der Vorlesung haben Sie den harmonischen Oszillator in einer Dimension behandelt, welcher durch den Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{1}$$

beschrieben wird. Mit der Skalierung $\xi = x/L$, $L = \sqrt{\hbar/2m\omega}$ lässt sich dieser zu

$$H = \hbar\omega\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{4}\xi^2\right). \tag{2}$$

vereinfachen. Mithilfe der Auf- und Absteigeoperatoren

$$a_\pm = \mp\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{2}\xi \tag{3}$$

lassen sich die Eigenfunktionen und zugehörigen Eigenwerte schreiben als

$$\phi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left((a_+)^n\phi_0\right)(\xi), \quad E_n = \hbar\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \tag{4}$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Die Funktionen $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ bilden eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2.1: Matrixelemente I

(a) Bestimmen Sie durch Umskalieren die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ des harmonischen Oszillators aus den $\phi_n(\xi)$. *2*

(b) Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle\psi_m|x\psi_n\rangle$ und $\langle\psi_m|p\psi_n\rangle$ für den Multiplikationsoperator x und den Impulsoperator $p = (\hbar/\mathrm{i})(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)$. *3*

(c) Berechnen Sie $\langle\psi_m|x^2\psi_n\rangle$ und $\langle\psi_m|p^2\psi_n\rangle$. *3*

Aufgabe 2.2: Matrixelemente II

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass jedes $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ als unendliche Reihe

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n \tag{5}$$

dargestellt werden kann.

(a) Geben Sie c_n in Termen von ϕ und der Orthonormalbasis ϕ_n an. *2*

(b) Wir betrachten zunächst den Fall, dass ϕ eine *endliche* Linearkombination von ϕ_n ist,

$$\phi = \sum_{n=0}^{N} c_n \phi_n. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass für einen linearen Operator A gilt

$$A\phi = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \phi_m \tag{7}$$

mit

$$d_m = \sum_{n=0}^{N} A_{mn} c_n, \tag{8}$$

wobei $A_{mn} = \langle \phi_m | A \phi_n \rangle$ die Matrixelemente von A bezüglich der Orthonormalbasis $\{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ sind. *3*

(c)* Zeigen Sie für den allgemeinen Fall einer unendlichen Reihe wie in Gleichung (5): Wenn der Operator A stetig ist, dann gilt *+2*

$$\langle \phi_m | A \phi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi_m | A \phi_n \rangle \langle \phi_n | \phi \rangle. \tag{9}$$

Aufgabe 2.3: Kohärente Zustände

Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei

$$v_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \phi_n. \tag{10}$$

(a) Berechnen Sie $\langle v_\alpha | v_\beta \rangle$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. *2*

(b) Geben Sie die Konstante N_α an, für die

$$\kappa_\alpha = N_\alpha v_\alpha \tag{11}$$

normiert ist, d.h. $\|\kappa_\alpha\| = 1$. *2*

(c) Zeigen Sie: für $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\mathrm{d}\bar{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha}{\pi}\, \mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\, v_\alpha \, \langle v_\alpha | \phi \rangle = \phi. \tag{12}$$

Hier ist $\mathrm{d}\bar{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}a\,\mathrm{d}b$, wenn $\alpha = a + \mathrm{i}b$. *3*

Abgabe am 06.05.2014, vor Beginn der Vorlesung