Universität Heidelberg

Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik

Übungen

Aufgaben zu Kapitel 10

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

Aufgabe 10.1: **Aufgaben zur Matrizenrechnung**

Berechnen Sie Summe und Differenz der Matrizen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ -5 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 12 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.2:

Berechnen Sie für die Matrizen aus der Aufgabe 10.1 die Produkte $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ und $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$.

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -20 & 5 & -40 \\ -9 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 9 & -14 & -24 \\ 16 & -1 & -16 \\ -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.3

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ und $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$.

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.4 **Drehungen**

Multiplizieren Sie folgende Transformations-Matrizen: $\underline{\underline{D}}^{(1)}(\varphi) \cdot \underline{\underline{D}}^{(3)}(\psi)$ und vergleichen Sie mit $\underline{\underline{D}}^{(3)}(\psi) \cdot \underline{\underline{D}}^{(1)}(\varphi)$

Speziell: Vergleichen Sie $\underline{\underline{D}}^{(1)}(\pi) \cdot \underline{\underline{D}}^{(3)}(\frac{\pi}{2})$ mit $\underline{\underline{D}}^{(3)}(\frac{\pi}{2}) \cdot \underline{\underline{D}}^{(1)}(\pi)$

$$\underline{\underline{D}}^{(1)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{D}}^{(3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}}^{(1)}(\varphi) \cdot \underline{\underline{D}}^{(3)}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\cos(\varphi)\sin(\psi) & \cos(\varphi)\cos(\psi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi)\sin(\psi) & -\sin(\varphi)\cos(\psi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}}^{(3)}(\psi) \cdot \underline{\underline{D}}^{(1)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi)\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi)\cos(\varphi) & \cos(\psi)\sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}}^{(1)}(\pi) \cdot \underline{\underline{D}}^{(3)}(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}}^{(3)}(\frac{\pi}{2}) \cdot \underline{\underline{D}}^{(1)}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.5 **Assoziativgesetz bei Matrizenmultiplikationen:**

$$\underline{\underline{C}} \cdot (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}) \;=\; \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \;=\; (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{A}}$$

Verifizieren Sie das Assoziativgesetz an der *Euler*- Drehung:

$$\underline{\underline{D}}^{E}(\psi,\theta,\varphi) \;:=\; \underline{\underline{D}}^{(3)}(\psi) \cdot \underline{\underline{D}}^{(1)}(\theta) \cdot \underline{\underline{D}}^{(3)}(\varphi)$$

Die *Euler*-Drehung beschreibt die Transformation vom raumfesten Koordinatensystem zum körperfesten System eines sich drehenden Kreisels.

$$\underline{\underline{D}}^{(3)}(\psi) \cdot (\underline{\underline{D}}^{(1)}(\theta) \cdot \underline{\underline{D}}^{(3)}(\varphi))$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\cos(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\psi)\cos(\varphi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\psi)\sin(\varphi) + \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\psi)\sin(\theta) \\ -\sin(\psi)\cos(\varphi) - \cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\psi)\sin(\varphi) + \cos(\psi)\cos(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\psi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

und

$$(\underline{\underline{D}}^{(3)}(\psi) \cdot \underline{\underline{D}}^{(1)}(\theta)) \cdot \underline{\underline{D}}^{(3)}(\varphi)$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi)\cos(\theta) & \sin(\psi)\sin(\theta) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi)\cos(\theta) & \cos(\psi)\sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\psi)\cos(\varphi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\psi)\sin(\varphi) + \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\psi)\sin(\theta) \\ -\sin(\psi)\cos(\varphi) - \cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\psi)\sin(\varphi) + \cos(\psi)\cos(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\psi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.6 **Drehungen, orthogonale Matrizen**
Wie lautet die Drehmatrix für eine Drehung um die 3-Achse um 45° ? Welche Komponenten haben die folgenden Vektoren nach dieser Transformation?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}}^{(3)}(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.7 **Inverse Matrix:**

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\underline{\underline{A}}^{-1}$.

Durch Zeilenumformungen an beiden Matrizen simultan bringen wir $\underline{\underline{A}}$ auf die Form der Einheitsmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{II.-III.}{\overset{I.\leftrightarrow III.}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{II.\leftrightarrow III.}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{III.-II.}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{II.+4\cdot III.}{\overset{I.-2\cdot III.}{\longrightarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{I.-II.}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Damit ist $\underline{\underline{A}}^{-1}$:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

AUFGABE 10.8 **PAULI- Spin Matrizen:**

$$\underline{\underline{S_x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S_y}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S_z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

$$\underline{\underline{S_x}}^2 = \underline{\underline{S_y}}^2 = \underline{\underline{S_z}}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie weiterhin:

$$\underline{\underline{S_x}} \cdot \underline{\underline{S_y}} - \underline{\underline{S_y}} \cdot \underline{\underline{S_x}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S_y}} \cdot \underline{\underline{S_z}} - \underline{\underline{S_z}} \cdot \underline{\underline{S_y}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S_z}} \cdot \underline{\underline{S_x}} - \underline{\underline{S_x}} \cdot \underline{\underline{S_z}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$