Universität Heidelberg

Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik

Aufgaben zu Kapitel 11

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

Aufgabe 11.1: **Determinanten**

a) Berechnen Sie mit allen Methoden, die besprochen wurden:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (-7+8)-(6+6) = -11$$

Cramersche Regel (Entwicklung nach der ersten Zeile):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \end{vmatrix} &= 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= [(-1)\cdot 7 + (-1)\cdot 3\cdot 2] + 2\cdot[2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1)\cdot(-3)] \\ &= [-7-6] + 2\cdot[4-3] = -13+2 = -11 \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie durch Umformung auf Dreiecksform:

$$\det\begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & -8 \\ 6 & 2 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

Umformung auf Dreiecksform:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 10 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & -8 \\ 6 & 2 & 10 & -5 \end{vmatrix} \rightarrow \mathit{IV.Zeile} - \mathit{I.Zeile}; \quad \mathit{II.Zeile} - \mathit{III.Zeile}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \mathit{III.Zeile} - \mathit{I.Zeile};$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Damit ergibt sich die Determinante aus der Cramerschen Regel zu:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-4) \cdot (-1) \cdot (-5) = -120$$

Aufgabe 11.2: **Determinanten**

Berechnen Sie folgende Determinanten:

a)

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = a_{13} \cdot (-a_{22}) \cdot a_{31}$$

b)

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{13} \cdot (-A_{22}) \cdot A_{31}$$

c)

$$\det \begin{pmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (A_{11}-\lambda)(A_{22}-\lambda)(A_{33}-\lambda) + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}(A_{22}-\lambda)A_{31} \\ &\quad -A_{12}A_{21}(A_{33}-\lambda) - (A_{11}-\lambda)A_{23}A_{32} \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 \cdot (A_{11}+A_{22}+A_{33}) \\ &\quad +\lambda \cdot (A_{13}A_{31} + A_{12}A_{21} + A_{23}A_{32} - A_{11}A_{22} - A_{22}A_{33} - A_{11}A_{33}) \\ &\quad +A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} \end{aligned}$$

Aufgabe 11.3: **Determinanten von Drehmatrizen**

Berechnen Sie die Determinanten von $D^{(1)}(\varphi)$, $D^{(2)}(\varphi)$ und $D^{(3)}(\varphi)$.

Die Drehmatrizen sind orthogonale Matrizen und bilden die spezielle othogonale Gruppe SO_3. Ihre Determinante ist immer $= 1$.

Ein Beispiel:

$$\det(D^{(1)}(\varphi)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{vmatrix} = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$$