Universität Heidelberg

Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik
Übungen

Aufgaben zu Kapitel 1
(aus: K. Hefft Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

Aufgabe 1.1: SI-Einheiten:

a) Welche Maßeinheit hat der Impuls in SI-Einheiten ausgedrückt?
$[p] = \frac{kg \cdot m}{s} = N \cdot s$

b) Aus welchem Gesetz kann man die Krafteinheit herleiten ?
$F = \frac{d}{dt}(p)$

c) Wer hat dieses Gesetz zuerst formuliert ?
Newton

d) Welche Dimension hat die Arbeit ?
$[W] = J = N \cdot m$

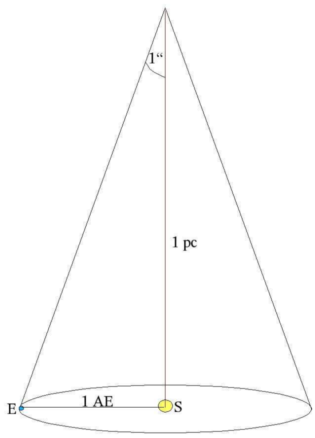
e) Welche Einheit hat die elektrische Feldstärke ?
$[\vec{E}] = \frac{V}{m}$

f) Astronomen benutzen oft die Einheit 1 Parsec (1 pc). 1 pc ist die Entfernung, aus dem der Erdbahnradius ($= 1,496 \cdot 10^{11}$m) unter dem Winkel einer Bogensekunde ($1'' = 1/3600°$) erscheint. Wieviel Meter entsprechen 1 pc ?

$$1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ} = \frac{2\pi}{360°} \cdot \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$$

$$\begin{aligned} 1pc &= \frac{1,496 \cdot 10^{11} m}{\tan(1'')} \approx \frac{1,496 \cdot 10^{11} m}{1''} = \frac{1,496 \cdot 10^{11} m}{2\pi} \cdot \frac{360°}{\left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}} \\ &= 3,086 \cdot 10^{16}\ m \end{aligned}$$

wie in folgender Graphik veranschaulicht wird:



Aufgabe 1.2: Umrechnung von Maßeinheiten

a) Berechnen Sie 30°,45°, 60° und 180° in Radian und 1 rad bzw. 2 rad in Grad.
Ausgehend von der Umrechnung eines Vollkreises $360° = 2\pi\ rad$ erhält man:

$$\begin{aligned} 30° &= \frac{1}{6}\pi\ rad \approx 0,52\ rad \\ 45° &= \frac{1}{4}\pi\ rad \approx 0,79\ rad \\ 60° &= \frac{1}{3}\pi\ rad \approx 1,05\ rad \\ 180° &= 1\ \pi\ rad \approx 3,14\ rad \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1\ rad &= \frac{180°}{\pi} \approx 57,3° \\ 2\ rad &= \frac{360°}{\pi} \approx 114,6° \end{aligned}$$

b) Wie viele Sekunden hat ein Sternenjahr (siderisches Jahr) mit 365 Tagen, 6 Stunden, 9 Minuten und 9,54 Sekunden ?

$$\begin{aligned} \text{1 Sternjahr} &= 365\ d + 6\ h + 9\ min + 9,54\ s \\ &= 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ s + 6 \cdot 60 \cdot 60\ s + 9 \cdot 60 \cdot 60\ s + 9,54\ s \\ &= 31\ 558\ 149,54\ s \end{aligned}$$

c) Wieviel kostet es bei einem “Strompreis” von 0,19 EURO/kWh, wenn Sie eine Nacht lang sechs Stunden eine 60-Watt Glühbirne brennen und Ihren PC laufen haben, der ca. 200 Watt “verbraucht” ?
200 W + 60 W = 260 W = 0,26 kW Gesamtverbrauch.

$$0,26\ kW \cdot 6\ h \cdot 0,19 \frac{EURO}{kWh} = 0,3\ EURO$$

d) Zwei amerikanische Kinder messen ihre Trainingsstrecke mit einem Stab aus, der 5 Fuß und 2 Inches lang ist. Der Stab paßt 254 mal hinein. Wie heiß der Lauf bei uns ? Wieviele Runden müssen die beiden laufen, bis sie eine Meile zurückgelegt haben ? (1 Meile = 1,609 km (USA), 1 Fuß = 1 ft = 30,48 cm, 1 Inch = 1 in = 1/12 ft = 2,54 cm)
Eine Umrechnung des Stabes ergibt eine Länge von
$5\ ft + 2\ in = 5 \cdot 12\ in + 2\ in = 62 \in = 157,48\ cm$
Daraus ergibt sich für die Länge der Trainingsstrecke:
$157,48\ cm \cdot 254 = 39999,9 cm \approx 400\ m$
Der entsprechende Lauf heißt im Deutschen 400-m-Lauf.
Um eine Meile (1609 m) zurückzulegen, müssen sie 4,0225 Runden laufen.

e) Bill Gates sagte: If General Motors had kept up with technology like the computer industry, we would all be driving twenty-five dollar cars that got 1000 miles per gallon. Meinte er das “3 Liter-Auto “ ? (1 mile = 1,609 km (USA), 1 gallon ≈ 3,785 l (USA)).
$1000\ miles = 1609\ km$
Daraus ergibt sich die Anzahl der Liter pro Kilometer a_1 und daraus die Anzahl der Liter pro 100 km a_{100} wie folgt:

$$a_1 = \frac{3,785\ l}{1609\ km} = 0,002352 \frac{l}{km} \quad a_{100} = a_1 \cdot 100 = \frac{0,2352\ l}{100\ km}$$

Bill Gates meinte nicht das ”3 Liter-Auto”, sondern ein noch effizienteres Fahrzeug.

Aufgabe 1.3: Dezimalvorsilben

a) Drücken Sie die Länge eines Sternenjahres (siderisches Jahr) (365 d + 6h + 9 min+ 9,54s) in Megasekunden aus.
Aus Aufgabe 1.2. b) ist die Dauer eines Sternjahres in Sekunden bekannt. Daraus folgt: $31\ 558\ 149,54\ s \approx 31,6\ Ms$

b) Die ideale Dauer eines wissenschaftlichen Vortrags beträgt ein Mikrojahrhundert. Wie viele Minuten sind das?
$100 \cdot 10^{-6}\ a = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60\ min = 52,56\ min$

c) Wie lange braucht ein Photon, um mit der Lichtgeschwindigkeit von $c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s 21 m weit durch den Hörsaal zu fliegen ?

$$t = \frac{21}{2,99792458 \cdot 10^8}\ s = 70 \cdot 10^{-9}\ s = 70\ ns$$

d) Bei der Planck-Energie von $E_p = 1,22 \cdot 10^{16}$ TeV werden für die Elementarteilchen Gravitationseffekte erwartet. Drücken Sie die dieser Energie entsprechende Planck-Masse M_p in Gramm aus (1 eV $= 1,60219 \cdot 10^{-19}$ J)

$$E_p = M_p \cdot c^2 \Leftrightarrow M_p = \frac{E_p}{c^2}$$

$$M_p = \frac{1,22 \cdot 10^{16} \cdot 10^{14} \cdot 1,60219 \cdot 10^{-19}}{(2,99792458 \cdot 10^8)^2}\ kg = 22 \cdot 10^{-6}\ g = 22\ \mu g$$

Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 2.1:

a) Zeigen Sie mit dem vorgeführten Gaußschen Rezept, dass

$$\sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2}$$

auch für ungerade m gilt.

Nach dem Gaußschen Rezept, von außen nach innen die Terme der Summe jeweils paarweise zusammenzufassen, ergibt sich nach Umordnung der Terme in der Summe[1] für ungerade m folgendes:

$$1 + m + 2 + (m-1) + ... + \frac{m-1}{2} + \left(\frac{m-1}{2} + 2\right) + \left(\frac{m-1}{2} + 1\right)$$

Fasst man von links beginnend die Terme immer paarweise zusammen, erhält man (m-1)/2 Terme, die (m+1) ergeben. Aufgrund des ungeraden m bleibt ein Term der Summe, der nicht mit einem Partner addiert werden kann. Daraus ergibt sich:

$$\frac{m-1}{2} \cdot (m+1) + \left(\frac{m-1}{2} + 1\right) = \frac{m-1}{2} \cdot (m+1) + \frac{m+1}{2} = (m+1)\frac{m}{2}$$

Vollständige Induktion:

1. **Induktionsbehauptung:** $\sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2}$ gilt für ungerade m.
2. **Induktionsanfang:**
   Die Behauptung gilt offensichtlich für m = 1: $\sum_{n=1}^{1} n = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$
3. **Induktionsvoraussetzung:**

   $\sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2}$ gilt für alle ungeraden m kleiner m_0.
4. **Induktionsschritt:**
   Zeige, dass aus der Gültigkeit der Behauptung für m die Gültigkeit der Behauptung für die folgende ungerade Zahl (m+2) folgt.
5. **Induktionsschluss:**

   $\sum_{n=1}^{m+2} n = \sum_{n=1}^{m} n + (m+1) + (m+2) = \dfrac{(m+2)(m+3)}{2} \qquad q.e.d.$

[1] Die Umordnung ist nur in absolut konvergenten Summen erlaubt

b) Beweisen Sie

$$\sum_{n=1}^{m} n^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Hinweis: Betrachten Sie $\sum_{n=1}^{m}(n+1)^3$ und extrahieren Sie die Summe aus der Behauptung daraus, um das Gewünschte zu zeigen.
Bei explizitem Auflisten der Terme in der Summe im Hinweis, stellt man fest, dass man den Index n um eins in positiver Richtung verschieben kann, um einen einfacheren Summanden zu erhalten:

$\sum_{n=1}^{m}(n+1)^3 = 2^3 + 3^3 + ... + (m+1)^3 = \sum_{n=2}^{m+1} n^3$

Andererseits ist die Summe im Hinweis gleichzeitig mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks ausmultiplizierbar, woraus sich folgendes ergibt:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}(n+1)^3 &= \sum_{n=1}^{m} n^3 + 3\sum_{n=1}^{m} n^2 + 3\sum_{n=1}^{m} n + \sum_{n=1}^{m} 1 \\ &= \sum_{n=1}^{m} n^3 + 3\sum_{n=1}^{m} n^2 + 3\sum_{n=1}^{m} n + m\end{aligned}$$

Um nun die Behauptung zu zeigen, werden die beiden Ergebnisse, die aus dem Hinweis gewonnen wurden, gleichgesetzt und diese Gleichung nach der Summe über n^2 aufgelöst:

$$\begin{aligned}3\sum_{n=1}^{m} n^2 &= \sum_{n=2}^{m+1} n^3 - \sum_{n=1}^{m} n^3 - 3\sum_{n=1}^{m} n - m \\ &= (m+1)^3 - 1^3 - 3(m+1)\cdot\frac{m}{2} - m \\ &= (m^3 + 3m^2 + 3m + 1 - 1 - 3(m+1)\cdot\frac{m}{2} - m \\ &= m^3 + \frac{3m^2}{2} + \frac{m}{2} \\ &= \frac{m}{2}\cdot(m+1)(2m+1)\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt, nachdem beide Seiten dieser Gleichung durch drei geteilt wurden. Zu beachten ist, dass sich im ersten Schritt Terme von n = 2 bis n = m aus den ersten beiden Summen gegenseitig annulieren und das Ergebnis aus Aufgabe 2.1. a) für die Summe über n benutzt wurde. Der letzte Schritt kann am einfachsten durch Ausmultiplizieren des Ergebnisses und anschließendem Vergleich der einzelnen Terme erfolgen.

Vollständige Induktion:

1. **Induktionsbehauptung:** $\sum_{n=1}^{m} n^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ gilt für alle m $\in \mathbb{N}$.
2. **Induktionsanfang:**
   Die Behauptung gilt offensichtlich für m = 1: $\sum_{n=1}^{1} n^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$
3. **Induktionsvoraussetzung:**

   $\sum_{n=1}^{m} n^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ gilt für alle m kleiner m_0.
4. **Induktionsschritt:**
   Zeige, dass aus der Gültigkeit der Behauptung für m die Gültigkeit der Behauptung für die folgende Zahl (m+1) folgt.
5. **Induktionsschluss:**

   $$\sum_{n=1}^{m+1} n^2 = \sum_{n=1}^{m} n^2 + (m+1)^2 = \frac{(m+1)}{6}(m+2)(2m+3) \qquad q.e.d.$$

   wobei der letzte Schritt am einfachsten durch Ausmultiplizieren des Ergebnisses und anschließenden Vergleich der einzelnen Terme erfolgt.

Aufgabe 2.2:

a) Bestimmen Sie die Länge der Raumdiagonalen in einem Würfel der Kantenlänge a.
Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ergibt sich $a\sqrt{3}$.

b) Berechnen Sie $\frac{(a^4-b^4)}{(a-b)}$

$\frac{(a^4-b^4)}{(a-b)} = \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(a-b)} = \frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}{(a-b)} = (a+b)(a^2+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

c) Berechnen Sie $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\ 0!} = \frac{n!}{(n-n)!\ n!} = \binom{n}{n} = 1$$

d) Berechnen Sie $\binom{7}{4}$ und $\binom{8}{3}$.

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!\ 4!} = 35$$

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!\ 3!} = 56$$

e) Zeigen Sie: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

f) Beweisen Sie das Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \\
&= \frac{n!(k+n-k+1)}{(n-k+1)!\,k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,(k-1)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$