

Universität Heidelberg

MATHEMATISCHER VORKURS
ZUM STUDIUM DER PHYSIK
ÜBUNGEN

Aufgaben zu Kapitel 3

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

AUFGABE 3.1: Graphische Darstellung von Folgen

Veranschaulichen Sie sich die besprochenen Folgen durch graphische Darstellung.
Projizieren Sie die Punkte auf die 2-Achse.

F1) $(n)_{n \in \mathbb{N}}$

F2) $[(-1)^{n+1}]_{n \in \mathbb{N}}$

F3) $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$

F4) $(\frac{1}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$

F5) $(\frac{n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

F6) $(q^n)_{n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R}}$

F7) $(\frac{(-1)^{n+1}}{n})_{n \in \mathbb{N}}$

F8) $(\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$

F9) $(n \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

F10) $[(1 + \frac{1}{n})^n]_{n \in \mathbb{N}}$

AUFGABE 3.2: Beschränktheit von Folgen

Untersuchen Sie die besprochenen Folgen auf Beschränktheit.

AUFGABE 3.3: Monotonie von Folgen

Untersuchen Sie die besprochenen Folgen auf Monotonie.

AUFGABE 3.4: Konvergenz von Folgen

- Untersuchen Sie die besprochenen Folgen auf Konvergenz.
- Berechnen Sie, damit Sie vorsichtig werden, die ersten zehn Glieder der Folge $a_n = n \cdot 0.9^n$ und vergleichen Sie mit a_{60} . Berechnen Sie die ersten zehn Glieder der Folge $a_n = \frac{n!}{10^n}$ und vergleichen Sie auch hier mit a_{60} .
- Die Folge, die abwechselnd aus den Gliedern von (F1) und (F3) besteht, also $a_{2n+1} = n$ und $a_{2n} = \frac{1}{n}$ hat nur einen einzigen Häufungspunkt, nämlich 0. Konvergiert sie gegen 0?

Zusatzaufgaben

AUFGABE 3.5: Arithmetische Folge

- Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine arithmetische Folge mit $a_2 = 6$, $a_5 = 15$. Geben Sie a_1 und d an.
- Zeigen Sie: Ist (a_n) eine arithmetische Folge, dann gilt:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

AUFGABE 3.6: Geometrische Folge

Sei (a_n) eine geometrische Folge. Alle Glieder seien positiv. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

AUFGABE 3.7: Geometrische Folge

Beim Durchdringen einer Glasplatte verliert ein Lichtstrahl $\frac{1}{15}$ seiner Helligkeit. Der Strahl geht durch 10 solcher Platten. Wieviel Prozent seiner ursprünglichen Helligkeit hat er verloren?

AUFGABE 3.8: Zinseszins

Ein Kapital von $K_0 = 10.000$ EURO werde auf ein Sparbuch mit einem Zinssatz von

$p = 3.5\%$ angelegt. Auf welchen Wert ist das Kapital nach einem Jahr, zwei Jahren, 10 Jahren angewachsen ?

AUFGABE 3.9: Wurzel

Benutzen Sie die Iterationsformel $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ um die Quadratwurzel von $a = 4$ bzw. $a = 2$ näherungsweise zu berechnen. Berechnen Sie dazu jeweils die ersten 5 Folgglieder und beginnen Sie in beiden Fällen mit dem Startwert $x_0 = 1$.

AUFGABE 3.10: Quotientenkriterium

Zeigen Sie mit dem Quotientenkriterium, dass

- a) die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ sowie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ konvergieren;
- b) die verallgemeinerte Exponentialreihe $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle reellen x konvergiert.