Universität Heidelberg

Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik

Übungen

Aufgaben zu Kapitel 3

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

Aufgabe 3.1: Graphische Darstellung von Folgen
Veranschaulichen Sie sich die besprochenen Folgen durch graphische Darstellung. Projizieren Sie die Punkte auf die 2-Achse.

F1) $(n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

F2) $[(-1)^{n+1}]_{n\epsilon\mathbb{N}}$

F3) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

F4) $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

F5) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

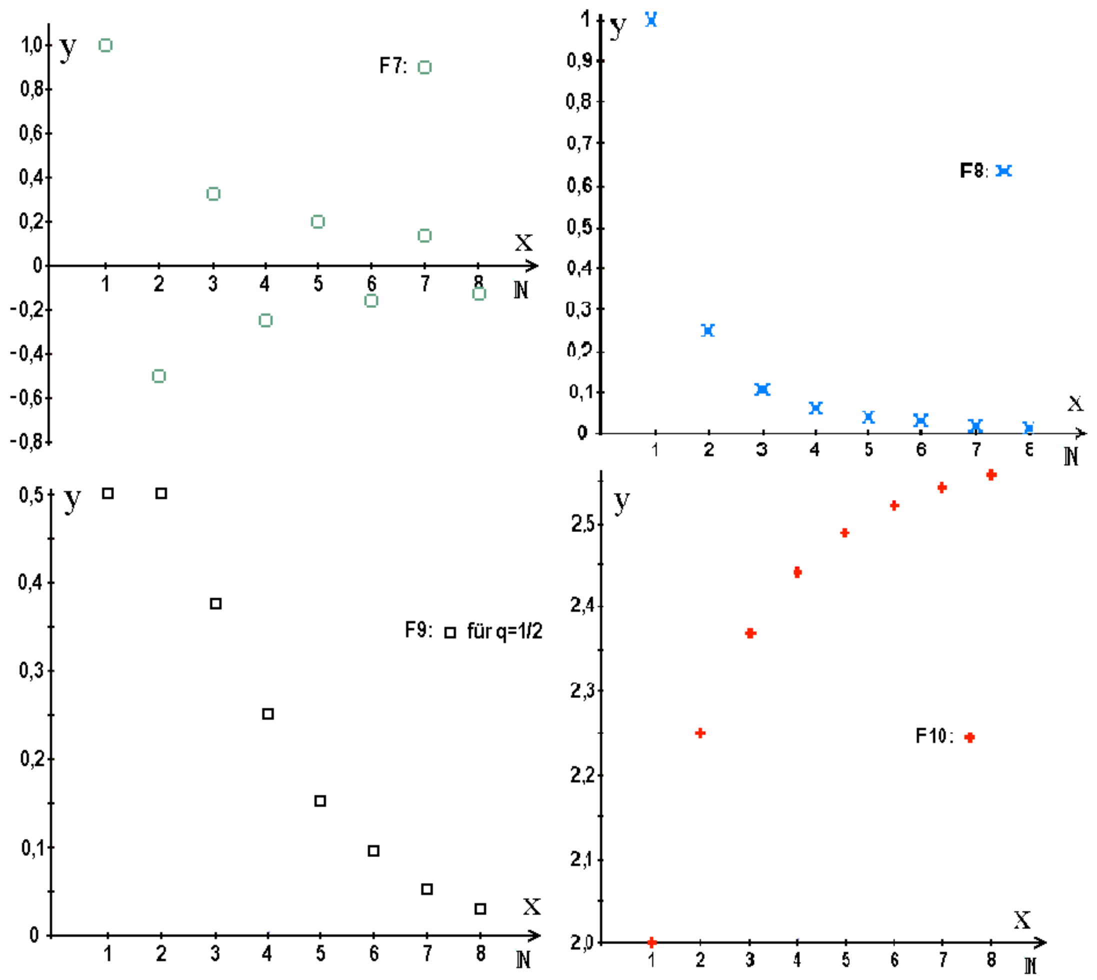
F6) $(q^n)_{n\epsilon\mathbb{N},q\epsilon\mathbb{R}}$

F7) $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

F8) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

F9) $(n \cdot q^n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

F10) $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]_{n\epsilon\mathbb{N}}$



AUFGABE 3.2: Beschränktheit von Folgen
Untersuchen Sie die besprochenen Folgen auf Beschränkheit.
Eine Folge hei§t nach oben bzw. nach unten beschränkt wenn gilt:
$\exists B : a_n \leq B \ \forall n \in \mathbb{N}$ bzw. $\exists A : A \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

- Für $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist A = 1/2 und B = 1.

- Für $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge für q < -1 unbeschränkt, ist A = q und B = q^2 für -1 < q < 0, ist A = 0 und B = q für 0 < q < 1 und ist A = q für q > 1.

Mathematisch exakte Beweise dafür lassen sich dadurch geben, dass man die globalen Maxima der Folgen, sowie das Verhalten für n $\rightarrow \infty$ betrachtet.

Aufgabe 3.3: Monotonie von Folgen
Untersuchen Sie die besprochenen Folgen auf Monotonie.

- $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend, da für aufeinander folgende Folgenglieder gilt:

  $$\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

- $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für q <0 eine alternierende Folge und daher nicht monoton, ist für $0 <$ q < 1 streng monoton fallend, ist für q $= 1$ monoton und ist für q > 1 streng monoton steigend. Alle Fälle lassen sich aus der Differenz von zwei aufeinander folgenden Folgengliedern mathmatisch beweisen:

  $$q^{n+1} - q^n = q^n \cdot (q-1) \ \forall q \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 3.4: Konvergenz von Folgen

a) Untersuchen Sie die besprochenen Folgen auf Konvergenz.

   - $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$
   - $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 1$
   - $(q^n)_{n\in\mathbb{N}} \to \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ \text{nicht konv.} & \text{für } |q| > 1 \end{cases}$

b) Berechnen Sie, damit Sie vorsichtig werden, die ersten zehn Glieder der Folge $a_n = n \cdot 0.9^n$ und vergleichen Sie mit a_{60}. Berechnen Sie die ersten zehn Glieder der Folge $a_n = \frac{n!}{10^n}$ und vergleichen Sie auch hier mit a_{60}.

a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
$n \cdot 0,9^n$	0,9	1,62	2,19	2,62	2,95	3,19	3,35	3,44	3,39	3,49
$\frac{n!}{10^n}$	0,1	0,02	0,006	0,0024	0,0012	0,0007	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004

a_n	a_{60}
$n \cdot 0,9^n$	0,11
$\frac{n!}{10^n}$	$8,3 \cdot 10^{21}$

c) Die Folge, die abwechselnd aus den Gliedern von (F1) und (F3) besteht, also $a_{2n+1} = n$ und $a_{2n} = \frac{1}{n}$ hat nur einen einzigen Häufungspunkt, nämlich 0. Konvergiert sie gegen 0 ?
Nein, die Folge konvergiert nicht gegen 0, da die Teilfolge a_{2n+1} nicht konvergent ist und sich damit keine Epsilon-Umgebung von 0 finden lässt, die alle Folgenglieder ab einem gewissen n einschließt.

Zusatzaufgaben

Aufgabe 3.5: Arithmetische Folge

a) Sei $(a_n)_{n \in N}$ eine arithmetische Folge mit $a_2 = 6$, $a_5 = 15$. Geben Sie a_1 und d an.
Aus der allgemeinen Formel $a_n = a_1 + (n-1)d$ folgt durch Einsetzen der gegebenen Werte das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d = 6 \\ a_5 &= a_1 + 4d = 15 \\ \Rightarrow d &= 3 \\ \Rightarrow a_1 &= 3 \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: Ist (a_n) eine arithmetische Folge, dann gilt:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

Anwenden der Definition einer arithmetischen Folge führt zu folgendem Gleichungssystem, das durch Elimination von d die Behauptung ergibt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + d \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned}$$

Aufgabe 3.6: Geometrische Folge
Sei (a_n) eine geometrische Folge. Alle Glieder seien positiv. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Anwenden der Definition einer geometrischen Folge führt zu folgendem Gleichungssystem, das durch Elimination von q die Behauptung ergibt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= q \cdot a_n \\ a_n &= q \cdot a_{n-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.7: Geometrische Folge
Bei durchdringen einer Glasplatte verliert ein Lichtstrahl $\frac{1}{15}$ seiner Heilligkeit. Der Strahl geht durch 10 solcher Platten. Wieviel Prozent seiner ursprünglichen Helligkeit hat er verloren?
Bei einer Ausgangsintensität von I_0 ist der Lichtstrahl nach Durchdringen von n Platten nur noch

$$I_n = q^n \cdot I_0 \quad \text{mit } q = (1 - \tfrac{1}{15}) = \tfrac{14}{15}$$

$$\Rightarrow I_{10} = \left(\tfrac{14}{15}\right)^{10} \cdot I_0 = 0,5016 \cdot I_0$$

Der Strahl verliert demnach 49,84% seiner Helligkeit.

Aufgabe 3.8: Zinseszins
Ein Kapital von $K_0 = 10.000$ EURO werde auf ein Sparbuch mit einem Zinssatz von $p = 3.5\%$ angelegt. Auf welchen Wert ist das Kapital nach einem Jahr, zwei Jahren, 10 Jahren angewachsen?
Analog zur vorangegangenen Aufgabe stellt man das Kapitalwachstum dar als

$$K_n = q^n \cdot K_0 \quad \text{mit } q = (1 + 0,035) = 1,035$$

$$\Rightarrow K_1 = 10350\ EURO \quad K_2 = 10712,25\ EURO \quad K_{10} = 14105,99\ EURO$$

Aufgabe 3.9: Wurzel
Benutzen Sie die Interationsformel $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ um die Quadratwurzel von $a = 4$ bzw. $a = 2$ näherungsweise zu berechnen. Berechnen Sie dazu jeweils die ersten 5 Folgeglieder und beginnen Sie in beiden Fällen mit dem Startwert $x_0 = 1$.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$a = 4$	1	2,5	2,05	2,00061	2,00000	2,00000
$a = 2$	1	1,5	1,41666	1,41215	1,41214	1,41214

Aufgabe 3.10: Quotientenkriterium
Zeigen Sie mit dem Quotientenkriterium, dass

a) die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ sowie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ konvergieren.

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} \right| = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{2n^2} \right| = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{n^2+2n+1}{2n^2} \right| < 1$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^4} \right| = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^4}{3n^4} \right| < 1$$

b) die verallgemeinerte Exponentialreihe $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle reellen x konvergiert.

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| < 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$$