Universität Heidelberg

# Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik

## Übungen

**Aufgaben zu Kapitel 4**

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

Aufgabe 4.1: Graphen, Definitionsbereiche und Wertevorräte
Geben Sie die Graphen und maximalen Definitionsbereiche der folgenden Funktionen an und wenn möglich auch die Wertevorräte:

a) $f(x) = -2x - 2$ b) $f(x) = 2 - 2x^2$ c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3$ e) $f(x) = x^4 - 4$ f) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

g) $f(x) = \frac{(2x-3)}{(x-1)}$ h) $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)}$ i) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

j) $f(x) = \frac{(x+2)}{(x^2-4)}$ k) $f(x) = \frac{(x^2+5)}{(x-2)}$

Aufgabe 4.2: Trigonometrische Funktionen:
Skizzieren Sie die Graphen und Definitionsbereiche von folgenden Funktionen und außer beim letzten Beispiel auch die Wertevorräte:

a) $f(x) = 1 + sin(x)$ b) $f(x) = sin(x) + cos(x)$ c) $f(x) = sin(x) - cos(x)$

d) $f(x) = x + sin(x)$ e) $f(x) = xsin(x)$ f) $f(x) = \frac{1}{sin(x)}$

g) $f(x) = \frac{1}{tan(x)}$ h) $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$

i) Auf einer schiefen Ebene liegt ein Steinblock vom Gewicht $G = 200N$ der sich bei einem Neigungswinkel von $\alpha = \frac{\pi}{6}$ selbständig in Bewegung setzt. Berechnen Sie die Haftreibungskraft $F_R$ und die Schwerkraftkomponente $F_S$ senkrecht zur Gleitebene.

j) Die Zeitabhängigkeit $I(t)$ der momentanen Stromstärke $I$ des Wechselstromes sei durch die Gleichung

$$I(t) = I_0 cos(2\pi ft)$$

gegeben, wobei $I_0$ die maximale Stromstärke (Scheitelwert) und $f$ die Frequenz des Wechselstroms ist. Bestimmen Sie den Wert von $I$ zum Zeitpunkt $t = t_1 = \frac{27}{8f}$ in Abhängigkeit von $I_0$.

AUFGABE 4.3: Exponentialfunktionen:
Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen für $x \geq 0$:

a) $f(x) = 1 - e^{-x}$ , die z.B. die Spannung beim Aufladen eines Kondensators beschreibt;

b) $f(x) = x + e^{-x}$

c) $f(x) = xe^{-x}$ Poissonverteilung

d) $f(x) = x^2 e^{-x}$

e) $f(x) = e^x + sin(x)$

f) $f(x) = e^{-x} sin(x)$ gedämpfte Schwingung

g) $f(x) = \frac{1}{cosh(x)}$

h) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ Bose-Einstein-Verteilung

i) $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ Fermi-Dirac-Verteilung

j) $f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$ Plancksche Strahlungsformel

AUFGABE 4.4: Betragsfunktionen:
Skizzieren Sie die Graphen und Wertevorräte folgender Funktionen:

a) $f(x) = 1 - \left|\frac{x}{a}\right|$ b) $f(x) = x + |x|$ c) $f(x) = \frac{1}{|x|}$

d) $f(x) = |x| cos(x)$

AUFGABE 4.5: Heaviside Funktion:
Sei $a > 0$.

a) Skizzieren Sie $\theta(-x - a)$

b) Vereinfachen und skizzieren Sie

   (i) $\theta(x)\theta(x - a)$,
   (ii) $\theta(-x)\theta(-x + a)$
   (iii) $\theta(-x)\theta(-x - a)$

c) Skizzieren Sie

   (i) $\theta(-x)\theta(x + a) = \theta(x + a) - \theta(x)$
   (ii) $\theta(-x)\theta(x - a)$
   (iii) $\theta(x + a)\theta(a - x)$

d) Zeichnen Sie den Graph von $\theta(x)e^{-x}$

e) Skizzieren Sie die Dreiecksfunktion

$$\left(1 - \left|\frac{x}{a}\right|\right) \theta(x + a)\theta(a - x)$$

Aufgabe 4.6: Mittelbare Funktionen:
Skizzieren Sie die Graphen der in der Vorlesung als Beispiele angegebenen Funktionen:

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad f(x) = |sin(x)|$ $\quad f(x) = e^{-|2x|}$

$f(x) = e^{-x^2}$

Skizzieren Sie weiterhin die Graphen der folgenden Schachtel-Funktionen:

a) $f(x) = sin(2x)$ b) $f(x) = sin(x) + sin(2x) + sin(4x)$ c) $f(x) = cos^2(x) - sin^2(x)$

d) $f(x) = sin(x^2)$ e) $f(x) = sin(\frac{1}{x})$ f) $f(x) = \left(\frac{sin(x)}{x}\right)^2$

g) $f(x) = tan(2x)$ h) $f(x) = tan^2(x)$ i) $f(x) = tan(x^2)$

j) $f(x) = e^{-2x}$ k) $f(x) = e^{sin(x)}$ l) $f(x) = 1 - |2x|$

m) $f(x) = \frac{1}{|2x|}$

Aufgabe 4.7: Symmetrie-Eigenschaften von Funktionen

1.) Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Spiegelsymmetrie:

a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = x^5$ c) $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$

d) $f(x) = tan(x)$ e) $f(x) = cot(x)$ f) $f(x) = sinh(x)$

g) $f(x) = cosh(x)$ h) $f(x) = -|x|$

2.) Bestimmen Sie den geraden und ungeraden Anteil von

a) $f(x) = x(x + 1)$ b) $f(x) = x\,sin(x) + cos(x)$ c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = \theta(x)$

Aufgabe 4.8: Beschränkheit:
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Beschränktheit auf $I\!R$:

a) $f(x) = 2 - 2x^2$ b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ c) $f(x) = \frac{(2x-3)}{(x-1)}$

d) $f(x) = sin(x) + cos(x)$ e) $f(x) = xsin(x)$ f) $f(x) = 1 - e^{-x}$

g) $f(x) = x + e^{-x}$ h) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ i) $f(x) = x^2e^{-x}$

j) $f(x) = e^{-x}sin(x)$ k) $f(x) = \frac{1}{|x|}$

Aufgabe 4.9: Monotone Funktionen
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Monotonie:

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3$ c) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

d) $f(x) = sin(x) \quad \text{in } [-\pi/2, \pi/2]$ e) $f(x) = tan(x) \quad \text{in } (-\pi/2, \pi/2)$

f) $f(x) = cos(x) \quad \text{in } [0, \pi]$

g) $f(x) = 1 - e^{-x}$ h) $f(x) = sinh(x)$ i) $f(x) = cosh(x)$

j) $f(x) = \theta(x)$

Aufgabe 4.10: Eineindeutige Funktionen
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Eineindeutigkeit (Bijektivität):

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3$ c) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

d) $f(x) = sin(x) \quad \text{in } [-\pi/2, \pi/2]$ e) $f(x) = tan(x) \quad \text{in } (-\pi/2, \pi/2)$

f) $f(x) = cos(x) \quad \text{in } [0, \pi]$

g) $f(x) = 1 - e^{-x}$ h) $f(x) = sinh(x)$ i) $f(x) = cosh(x)$

j) $f(x) = \theta(x)$

Aufgabe 4.11: Umkehrfunktionen
Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen folgender Funktionen:

a) $f(x) = -2x - 2$ b) $f(x) = 2 - 2x^2$ c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

d) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3$ e) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ f) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

Aufgabe 4.12: Logarithmen:

a) Was ist $log_b(b)$ mit $b \in R$?
b) Zeigen Sie, dass $ln(10) = \frac{1}{lg(e)}$ sowie $ln(2) = \frac{1}{ld(e)}$.
c) Berechnen Sie $ld(x)$ aus $ln(x)$.
d) Berechnen Sie $2,5^{2,5}$.

Aufgabe 4.13: Area-Funktionen

a) Zeigen Sie, dass aus $y = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ folgt: $x = sinh(y)$

b) Zeigen Sie, dass aus $y = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ folgt $x = tanh(y)$

Aufgabe 4.14 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit von Funktionen
Berechnen Sie

a) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1+x}{1-x}$

b) $\lim_{x \to \pi} \frac{sin(x)}{x-\pi}$

c) $\lim_{x \to 0} (tan(x))^2$

d) Geben Sie den Funktionswert von $f$ an der Stelle $x = 1$ an, der $f$ zu einer stetigen Funktion macht:

$$f : x \longrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ ? & x = 1 \end{cases}$$

e) Sei $f(x) = \frac{3x+x^2}{x}$ für $x \neq 0$. Gibt es $b \in I\!R$ so dass nach Festsetzen von $f(0) = b$ die Funktion $f$ auf ganz $I\!R$ stetig ist ?

Aufgabe 4.15: Stetige Funktionen
Überprüfen Sie die Stetigkeit folgender Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ ($a \in Rf\ddot{u}ri)undj)$ ):

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

d) $f(x) = x\, sin(x)$ e) $f(x) = x + e^{-x}$ f) $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$

g) $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$ h) $f(x) = |x|$ i) $f(x) = \theta(x+a)\theta(a-x)$

j) $f(x) = \theta(x)\theta(-x-a)$ k) $f(x) = \theta(x)e^{-x}$ l) $f(x) = \theta(x)xe^{-x}$