Universität Heidelberg

Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik

Übungen

Aufgaben zu Kapitel 4

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

Aufgabe 4.1: Graphen, Definitionsbereiche und Wertevorräte
Geben Sie die Graphen und maximalen Definitionsbereiche der folgenden Funktionen an und wenn möglich auch die Wertevorräte:

a) $f(x) = -2x - 2$ b) $f(x) = 2 - 2x^2$ c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3$ e) $f(x) = x^4 - 4$ f) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

g) $f(x) = \frac{(2x-3)}{(x-1)}$ h) $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)}$ i) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

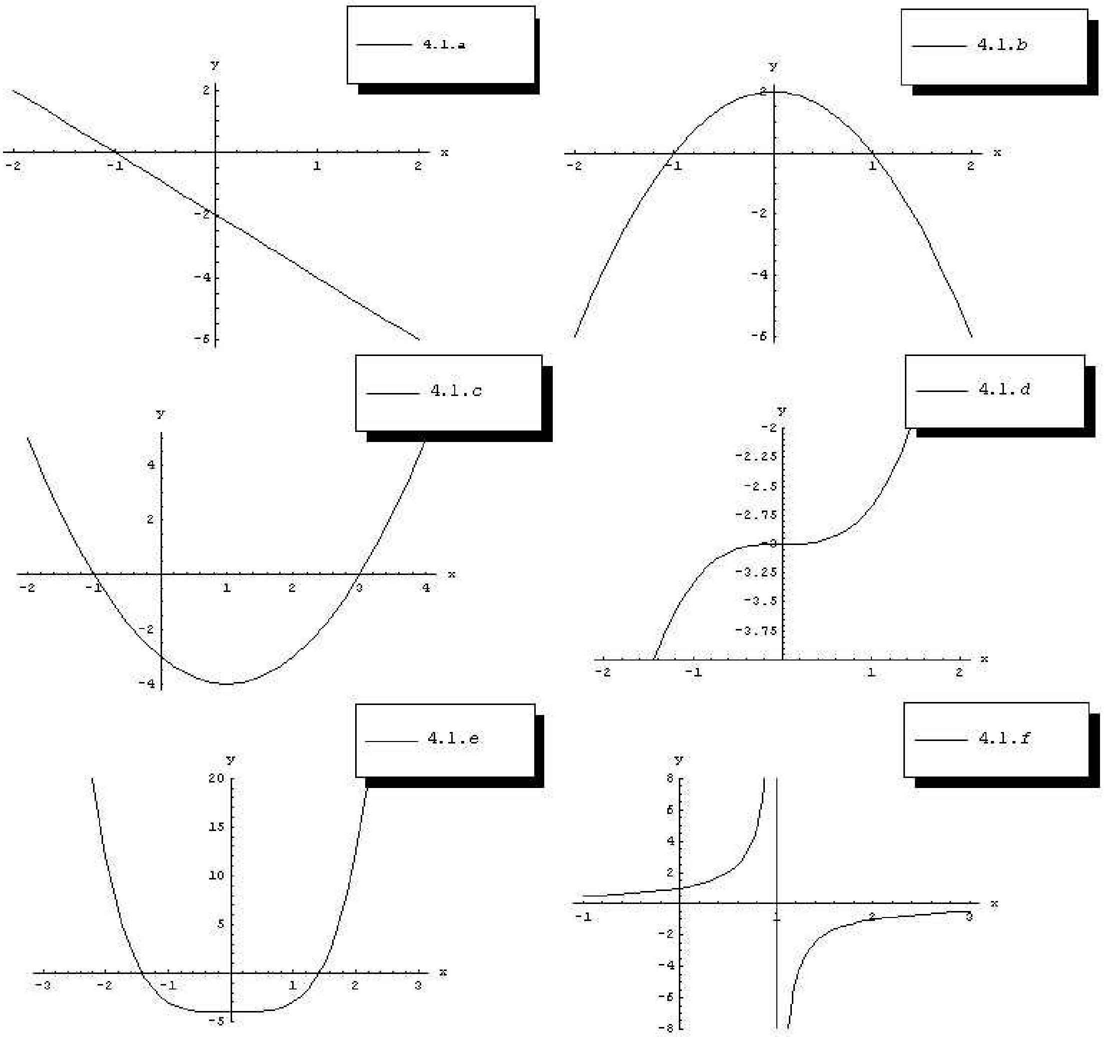
j) $f(x) = \frac{(x+2)}{(x^2-4)}$ k) $f(x) = \frac{(x^2+5)}{(x-2)}$

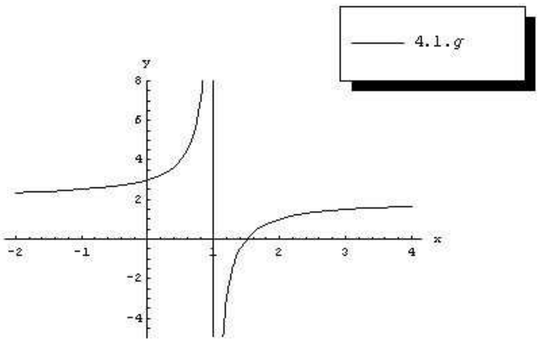
a) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}$
b) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = (-\infty, 2]$
c) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-4, \infty)$

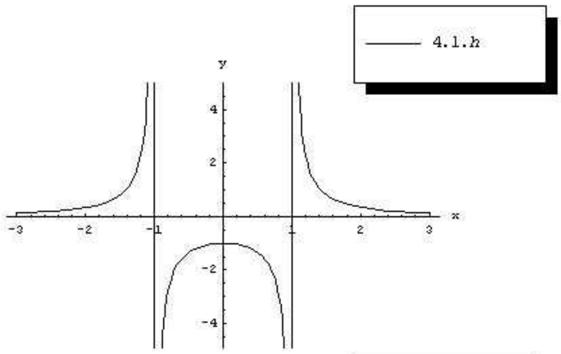
d) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}$
e) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-4, \infty)$
f) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

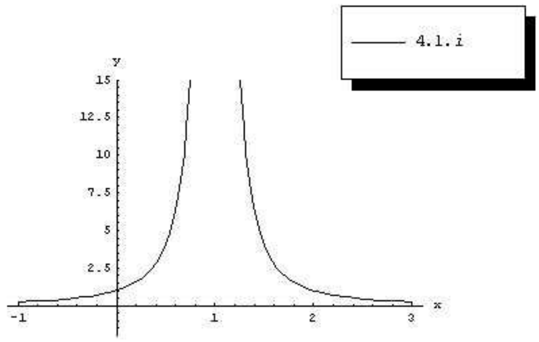
g) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $W_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
h) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $W_f = \mathbb{R} \setminus (-1, 0]$
i) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $W_f = \mathbb{R}^+$

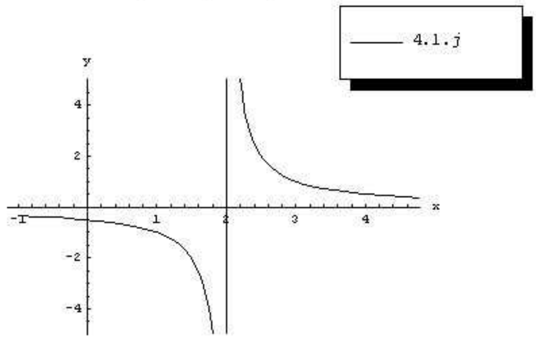
j) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
k) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $W_f = \mathbb{R} \setminus (-2, 10)$

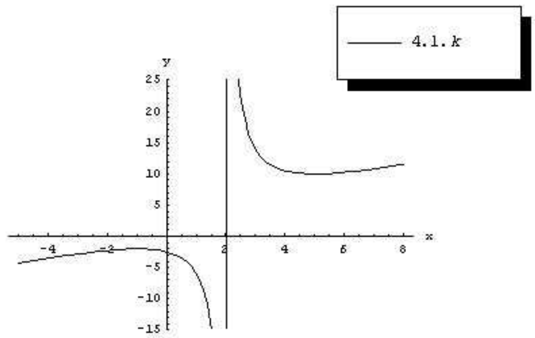

4.1.a
4.1.b
4.1.c
4.1.d
4.1.e
4.1.f


4.1.g


4.1.h


4.1.i


4.1.j


4.1.k

AUFGABE 4.2: Trigonometrische Funktionen:
Skizzieren Sie die Graphen und Definitionsbereiche von folgenden Funktionen und außer beim letzten Beispiel auch die Wertevorräte:

a) $f(x) = 1 + sin(x)$

b) $f(x) = sin(x) + cos(x)$

c) $f(x) = sin(x) - cos(x)$

d) $f(x) = x + sin(x)$

e) $f(x) = xsin(x)$

f) $f(x) = \frac{1}{sin(x)}$

g) $f(x) = \frac{1}{tan(x)}$

h) $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$

a) $D_f = \mathbb{R}$
$W_f = [0, 2]$

b) $D_f = \mathbb{R}$
$W_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

c) $D_f = \mathbb{R}$
$W_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

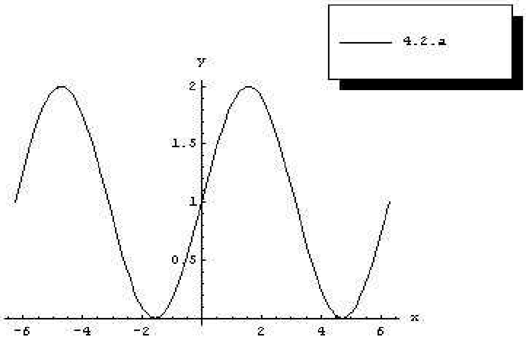
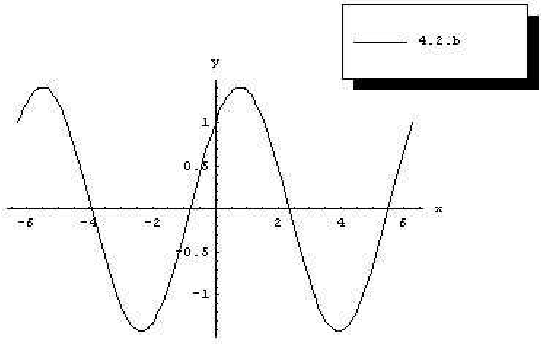
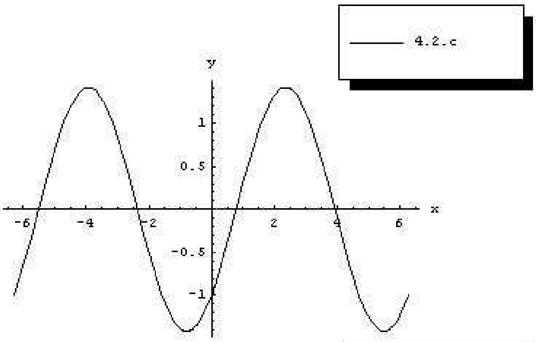
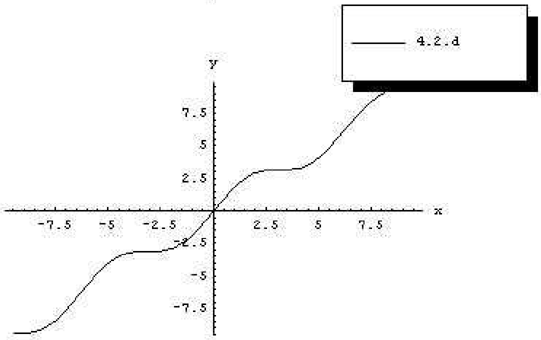
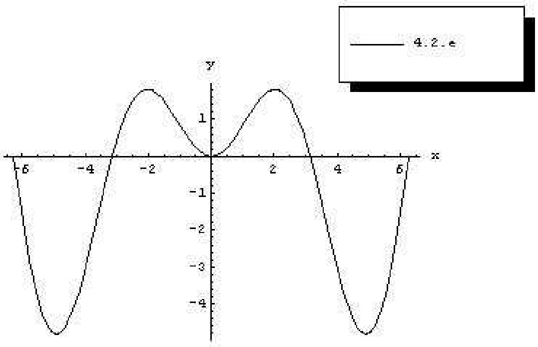
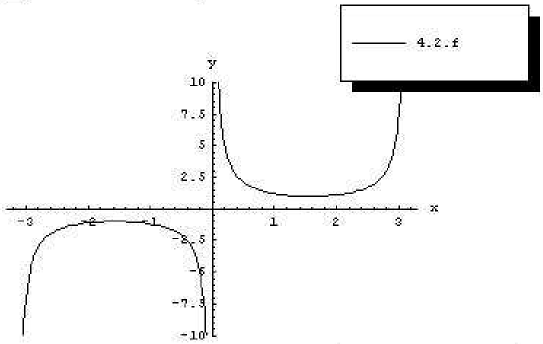
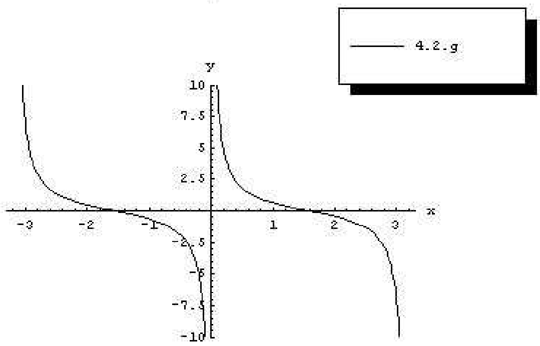
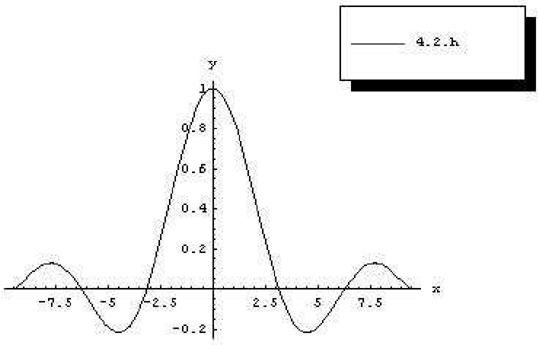
d) $D_f = \mathbb{R}$
$W_f = \mathbb{R}$

e) $D_f = \mathbb{R}$
$W_f = \mathbb{R}$

f) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2n\pi, n \in \mathbb{N}\}$
$W_f = \{y \in \mathbb{R} | |y| \geq 1\}$

g) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\}$
$W_f = \mathbb{R}$

h) $D_f = \mathbb{R}$

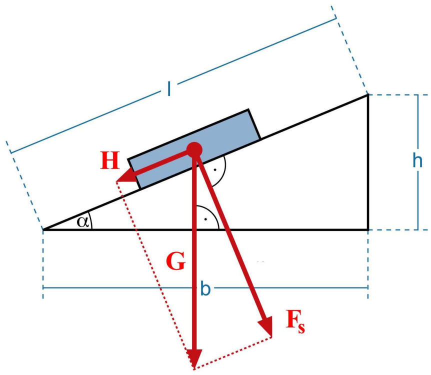

4.2.a

4.2.b

4.2.c

4.2.d

4.2.e

4.2.f

4.2.g

4.2.h

i) Auf einer schiefen Ebene liegt ein Steinblock vom Gewicht $G = 200N$ der sich bei einem Neigungswinkel von $\alpha = \frac{\pi}{6}$ selbständig in Bewegung setzt. Berechnen Sie die Haftreibungskraft F_R und die Schwerkraftkomponente F_S senkrecht zur Gleitebene.

Aus der nachfolgenden Graphik kann man folgende Beziehungen zwischen den gesuchten Größen und dem Gewicht G ablesen:

$|F_R| = |H| = G \cdot \sin(\alpha) = 200 \cdot \frac{1}{2}N = 100N$

$|F_S| = G \cdot \cos(\alpha) = 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}N \approx 173N$



j) Die Zeitabhängigkeit $I(t)$ der momentanen Stromstärke I des Wechselstromes sei durch die Gleichung

$$I(t) = I_0 cos(2\pi f t)$$

gegeben, wobei I_0 die maximale Stromstärke (Scheitelwert) und f die Frequenz des Wechselstroms ist. Bestimmen Sie den Wert von I zum Zeitpunkt $t = t_1 = \frac{27}{8f}$.

Durch Einsetzen von t_1 erhält man I_1 in Abhängigkeit von I_0:

$I_1(t_1) = I_0 \cdot \cos\left(\frac{27}{8}\pi\right) = -I_0\frac{\sqrt{2}}{2}$

Aufgabe 4.3: Exponentialfunktionen:
Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen für $x \geq 0$:

a) $f(x) = 1 - e^{-x}$, die z.B. die Spannung beim Aufladen eines Kondensators beschreibt;

b) $f(x) = x + e^{-x}$

c) $f(x) = xe^{-x}$ Poissonverteilung

d) $f(x) = x^2 e^{-x}$

e) $f(x) = e^x + sin(x)$

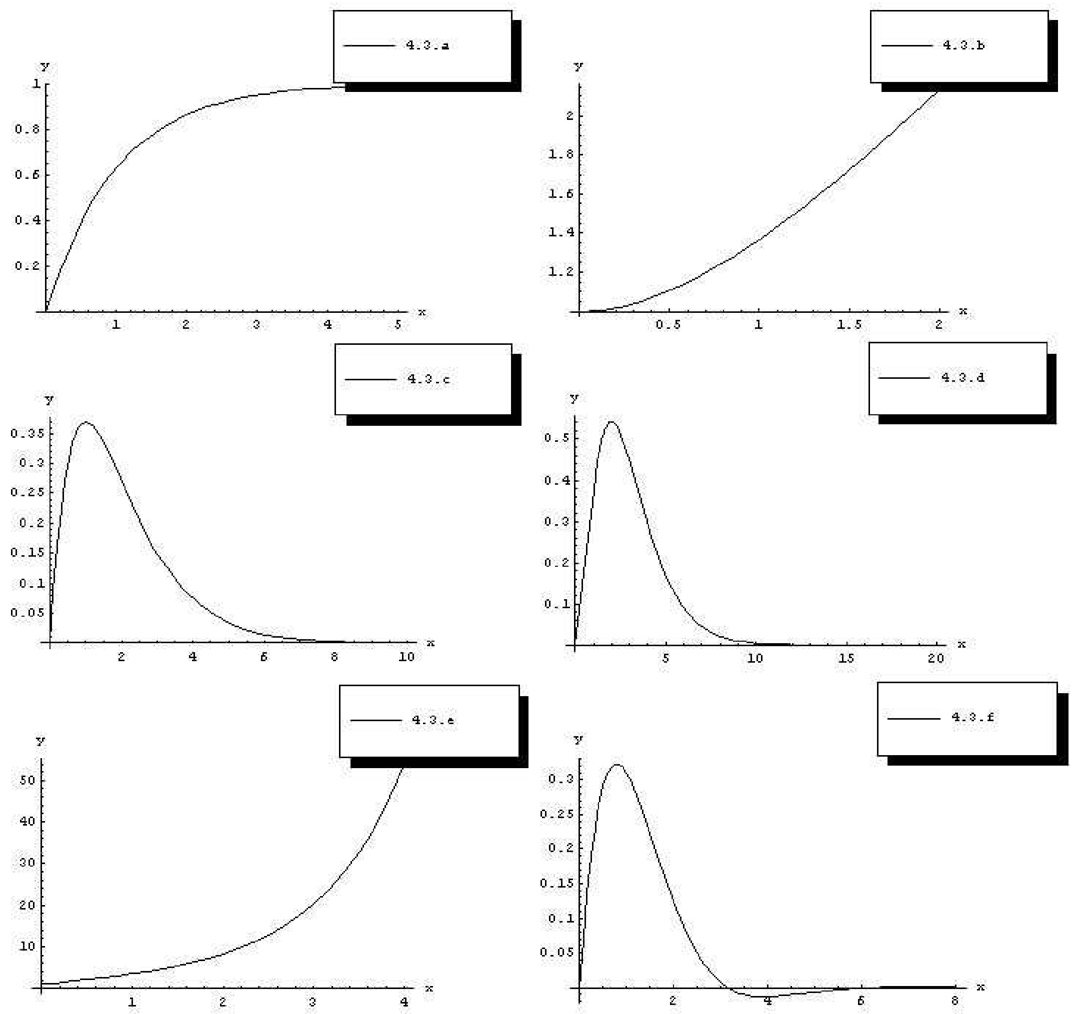
f) $f(x) = e^{-x} sin(x)$ gedämpfte Schwingung

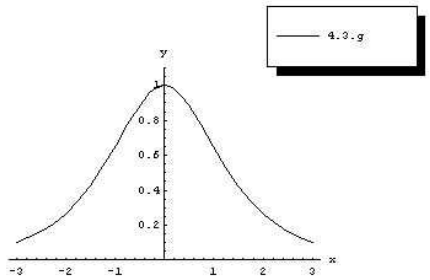
g) $f(x) = \frac{1}{cosh(x)}$

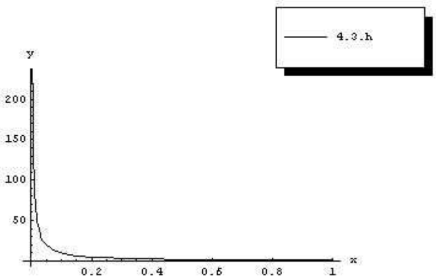
h) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ Bose-Einstein-Verteilung

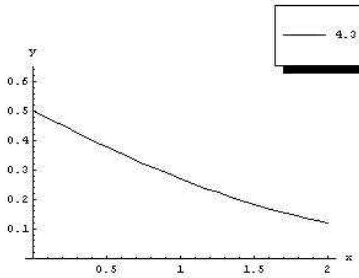
i) $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ Fermi-Dirac-Verteilung

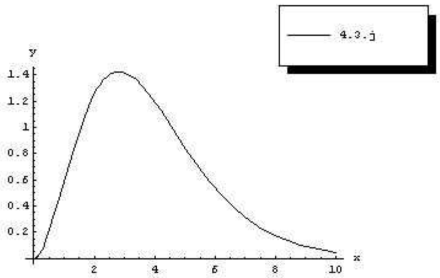
j) $f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$ Plancksche Strahlungsformel







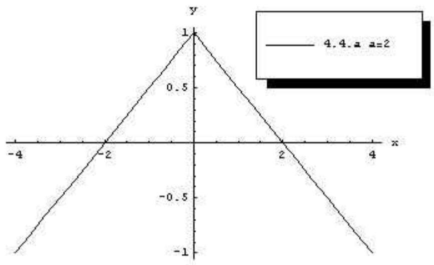


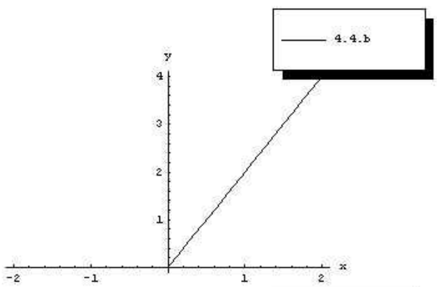


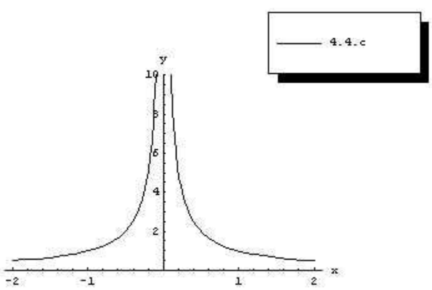
Aufgabe 4.4: Betragsfunktionen:
Skizzieren Sie die Graphen und Wertevorräte folgender Funktionen:

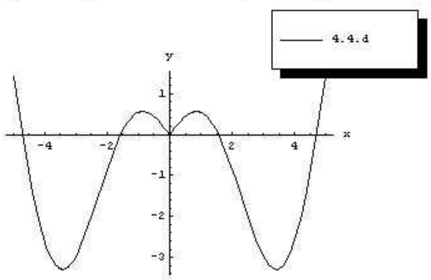
a) $f(x) = 1 - \left|\frac{x}{a}\right|$ b) $f(x) = x + |x|$ c) $f(x) = \frac{1}{|x|}$ d) $f(x) = |x| cos(x)$

a) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = (-\infty, 1]$ b) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [0, \infty)$ c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $W_f = (0, \infty)$ d) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}$



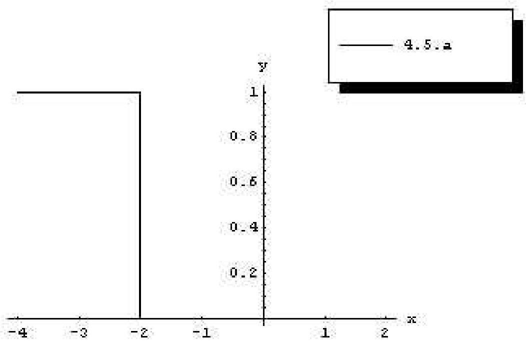






Aufgabe 4.5: Heaviside Funktion:
Sei $a > 0$.

a) Skizzieren Sie $\theta(-x-a)$



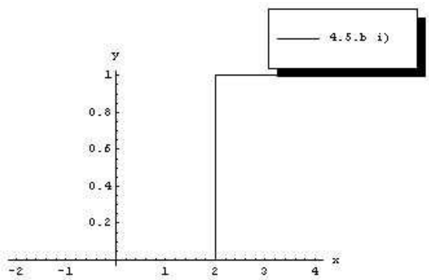
b) Vereinfachen Sie die folgenden Produkte::

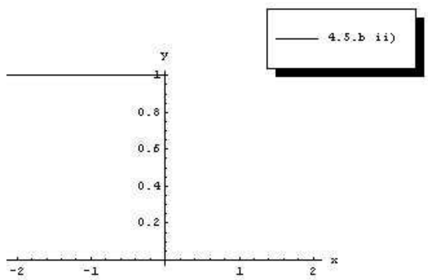
(i) $\theta(x)\theta(x-a) \quad = \theta(x-a),$

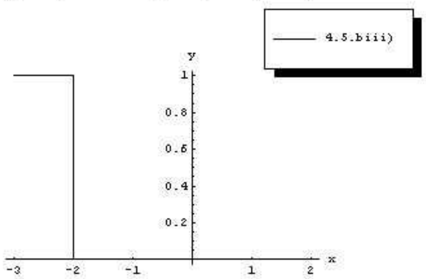
(ii) $\theta(-x)\theta(-x+a \quad = \theta(-x))$

(iii) $\theta(-x)\theta(-x-a) \quad = \theta(-x-a)$

Hier soll erkannt werden, dass bei den Produkten jeweils eine Theta-Funktion überflüssig ist. Anhand der graphischen Darstellung der einzelnen Faktoren ist dies erkennbar: für welche x liefert der erste Faktor einen Beitrag, für welche x der zweite. Daraus resultieren die folgenden Graphen (mit a = 2 als Bsp.):





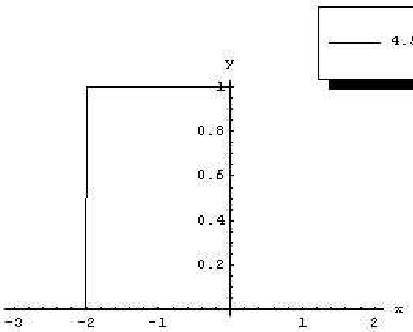


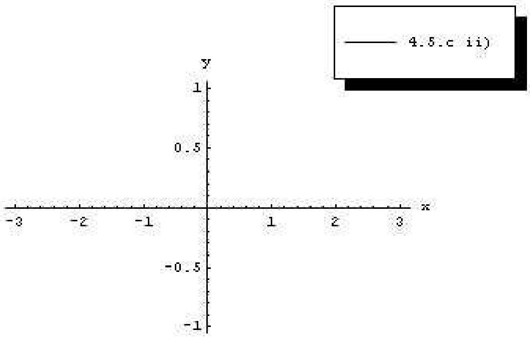
c) Veranschaulichen Sie sich

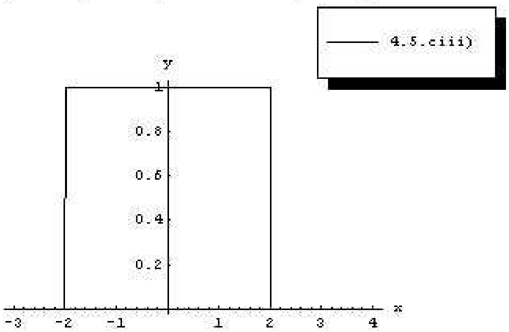
(i) $\theta(-x)\theta(x+a) = \theta(x+a) - \theta(x)$

(ii) $\theta(-x)\theta(x-a)$

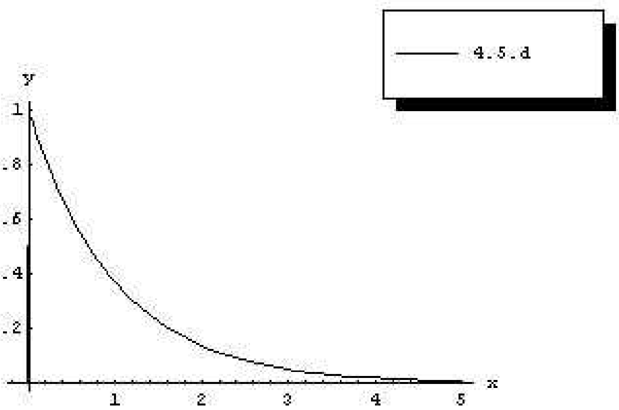
(iii) $\theta(x+a)\theta(a-x)$





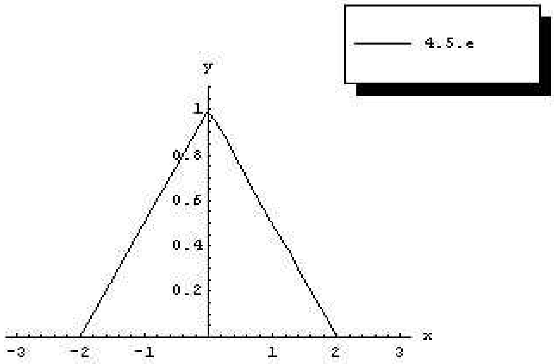


d) Zeichnen Sie den Graph von $\theta(x)e^{-x}$



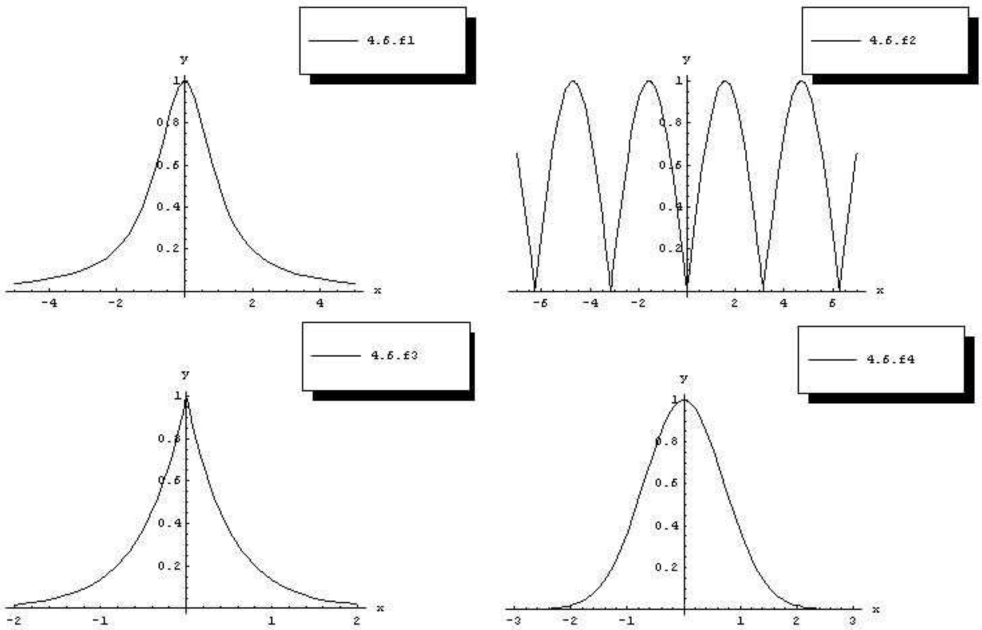
e) Skizzieren Sie die Dreiecksfunktion

$$\left(1-\left|\frac{x}{a}\right|\right)\theta(x+a)\theta(a-x)$$



AUFGABE 4.6: Mittelbare Funktionen:
Skizzieren Sie die Graphen der in der Vorlesung als Beispiele angegebenen Funktionen:

f1) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ f2) $f(x)=|sin(x)|$ f3) $f(x)=e^{-|2x|}$ f4) $f(x)=e^{-x^2}$



Skizzieren Sie weiterhin die Graphen der folgenden Schachtel-Funktionen:

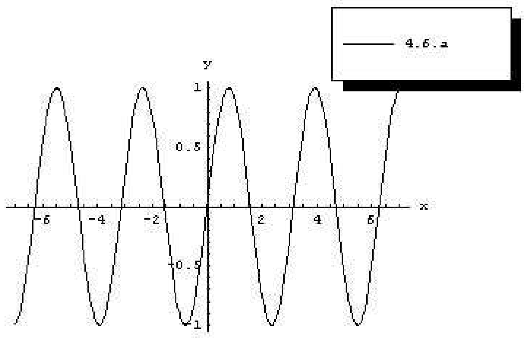
a) $f(x) = sin(2x)$ b) $f(x) = sin(x) + sin(2x) + sin(4x)$ c) $f(x) = cos^2(x) - sin^2(x)$

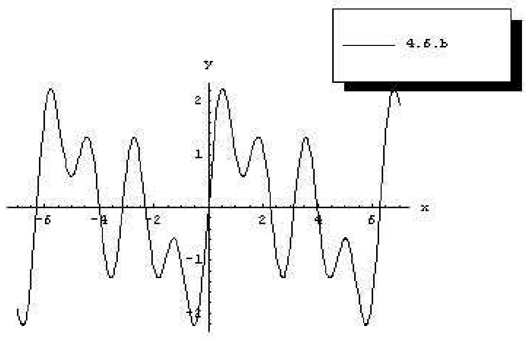
d) $f(x) = sin(x^2)$ e) $f(x) = sin(\frac{1}{x})$ f) $f(x) = \left(\frac{sin(x)}{x}\right)^2$

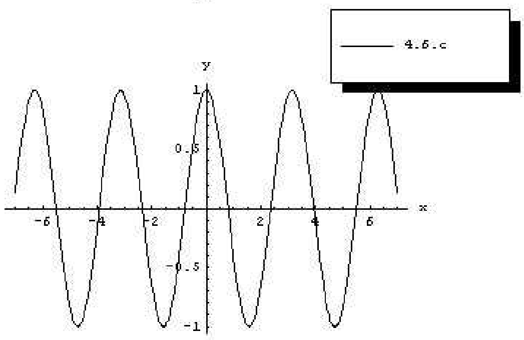
g) $f(x) = tan(2x)$ h) $f(x) = tan^2(x)$ i) $f(x) = tan(x^2)$

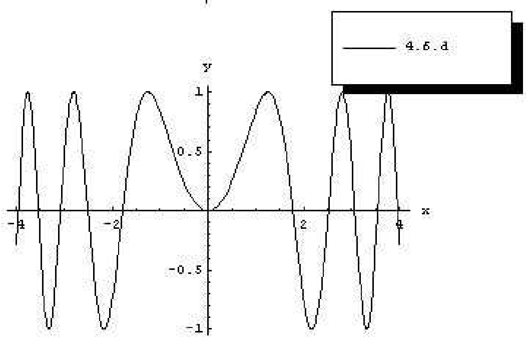
j) $f(x) = e^{-2x}$ k) $f(x) = e^{sin(x)}$ l) $f(x) = 1 - |2x|$

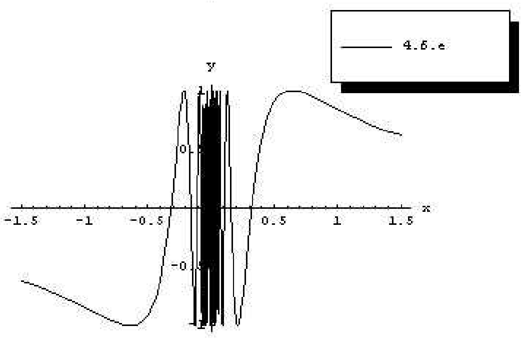
m) $f(x) = \frac{1}{|2x|}$

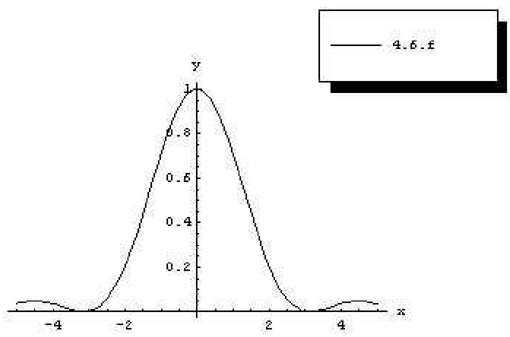


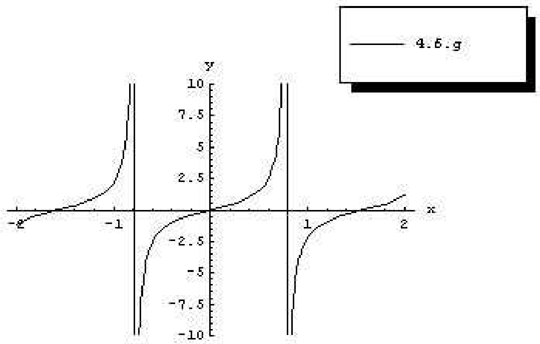


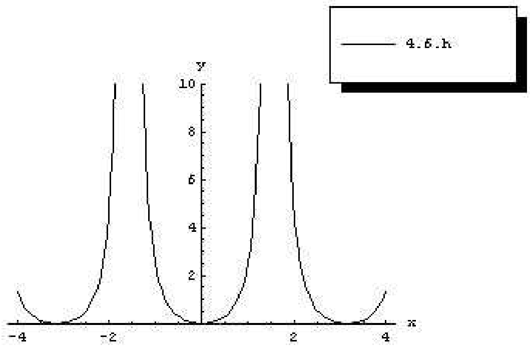


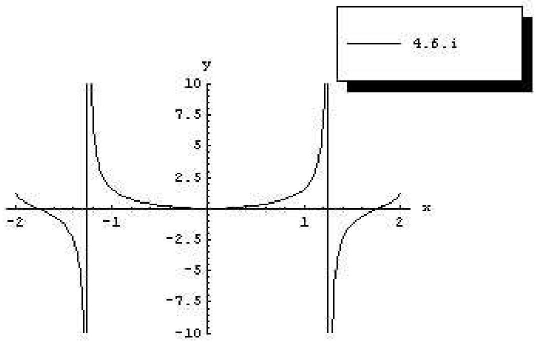


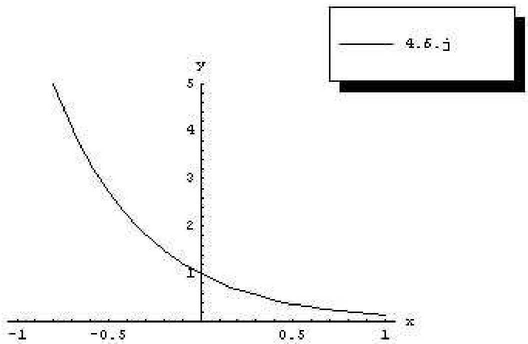


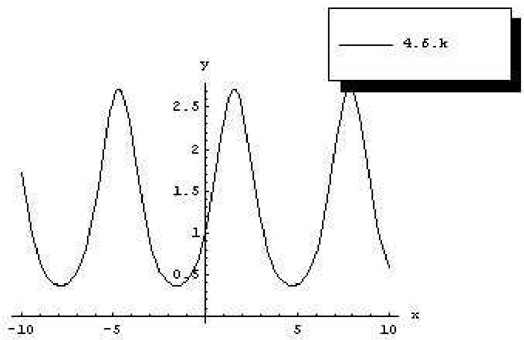


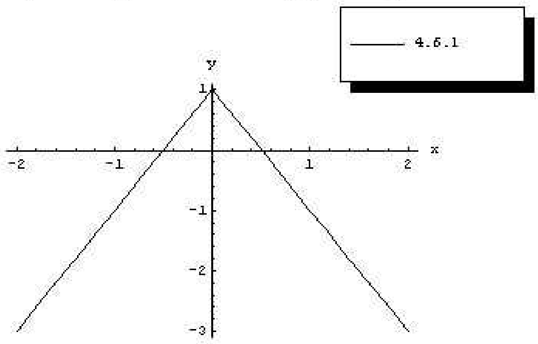

4.6.g
y
x
10
7.5
5
2.5
-2.5
-5
-7.5
-10
-2
-1
1
2

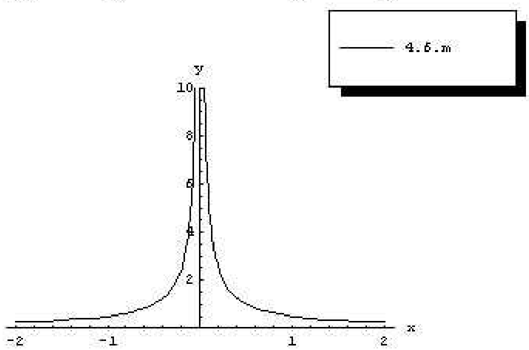

4.6.h
y
x
10
8
6
4
2
-4
-2
2
4


4.6.i
y
x
10
7.5
5
2.5
-2.5
-5
-7.5
-10
-2
-1
1
2


4.6.j
y
x
5
4
3
2
1
-1
-0.5
0.5
1


4.6.k
y
x
2.5
2
1.5
1
0.5
-10
-5
5
10


4.6.l
y
x
1
-1
-2
-3
-2
-1
1
2


4.6.m
y
x
10
8
6
4
2
-2
-1
1
2

Aufgabe 4.7: Symmetrie-Eigenschaften von Funktionen

1.) Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Spiegelsymmetrie:

a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = x^5$ c) $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$

d) $f(x) = tan(x)$ e) $f(x) = cot(x)$ f) $f(x) = sinh(x)$

g) $f(x) = cosh(x)$ h) $f(x) = -|x|$

a) $f(-x) = (-1)^4 \cdot x^4 = x^4 = f(x) \Rightarrow$ gerade

b) $f(-x) = (-1)^5 \cdot x^5 = -x^5 = -f(x) \Rightarrow$ ungerade

c) $f(-x) = -\frac{\sin(-x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x) \Rightarrow$ gerade

d) $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -f(x) \Rightarrow$ ungerade

e) $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -f(x) \Rightarrow$ ungerade

f) $f(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{x}\right) = -\sinh(x) = -f(x) \Rightarrow$ ungerade

g) $f(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{x}\right) = \cosh(x) = f(x) \Rightarrow$ gerade

h) $f(-x) = -|-x| = -|x| = f(x) \Rightarrow$ gerade

2.) Bestimmen Sie den geraden und ungeraden Anteil von

a) $f(x) = x(x+1)$ b) $f(x) = x\,sin(x) + cos(x)$ c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = \theta(x)$

Der gerade Anteil einer Funktion f wird bestimmt durch:
$f_+(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$

Der ungerade Anteil einer Funktion f wird bestimmt durch:
$f_-(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$

Damit ergibt sich die Funktion als Summe der Anteile: $f(x) = f_+ + f_-$

a) $f_+(x) = x^2$ $f_-(x) = x$

b) $f_+(x) = f(x)$ $f_-(x) = 0$

c) $f_+(x) = \cosh(x)$ $f_-(x) = \sinh(x)$

d) $f_+(x) = \frac{1}{2}$ $f_-(x) = \theta(x) - \frac{1}{2}$

Aufgabe 4.8: Beschränkheit:
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Beschränktheit auf $I\!R$:

a) $f(x) = 2 - 2x^2$	b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$	c) $f(x) = \frac{(2x-3)}{(x-1)}$
d) $f(x) = sin(x) + cos(x)$	e) $f(x) = xsin(x)$	f) $f(x) = 1 - e^{-x}$
g) $f(x) = x + e^{-x}$	h) $f(x) = x \cdot e^{-x}$	i) $f(x) = x^2 e^{-x}$
j) $f(x) = e^{-x} sin(x)$	k) $f(x) = \frac{1}{\lvert x \rvert}$	

Eine Funktion f heißt nach unten beschränkt, wenn folgendes gilt:
$\exists A \in \mathbb{R} : A \leq f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

Eine Funktion f heißt nach oben beschränkt, wenn folgendes gilt:
$\exists B \in \mathbb{R} : f(x) \leq B\ \forall x \in \mathbb{R}$

a)	A nicht vorhanden	$B = 2$
b)	$A = -4$	B nicht vorhanden
c)	A nicht vorhanden	B nicht vorhanden
d)	$A = -\sqrt{2}$	$B = \sqrt{2}$
e)	A nicht vorhanden	B nicht vorhanden
f)	A nicht vorhanden	$B = 1$
g)	$A = 1$	B nicht vorhanden
h)	A nicht vorhanden	$B = \frac{1}{e}$
i)	$A = 0$	B nicht vorhanden
j)	A nicht vorhanden	B nicht vorhanden
i)	$A = 0$	B nicht vorhanden

Aufgabe 4.9: Monotone Funktionen
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Monotonie:

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3$ c) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

d) $f(x) = sin(x)$ in $[-\pi/2, \pi/2]$ e) $f(x) = tan(x)$ in $(-\pi/2, \pi/2)$

f) $f(x) = cos(x)$ in $[0, \pi]$

g) $f(x) = 1 - e^{-x}$ h) $f(x) = sinh(x)$ i) $f(x) = cosh(x)$

j) $f(x) = \theta(x)$

a) nicht monoton in $\mathbb{R}$
b) streng monoton wachsend in $\mathbb{R}$
c) nicht monoton in $\mathbb{R}$
d) streng monoton wachsend in $[-\pi/2, \pi/2]$
e) streng monoton wachsend in $(-\pi/2, \pi/2)$
f) streng monoton fallend in $\mathbb{R}$
g) streng monoton wachsend in $[0, \pi]$
h) streng monoton wachsend in $\mathbb{R}$
i) nicht monoton in $\mathbb{R}$
j) monoton wachsend in $\mathbb{R}$

Aufgabe 4.10: Eineindeutige Funktionen
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Eineindeutigkeit (Bijektivitt):

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3$ c) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

d) $f(x) = sin(x)$ in $[-\pi/2, \pi/2]$ e) $f(x) = tan(x)$ in $(-\pi/2, \pi/2)$

f) $f(x) = cos(x)$ in $[0, \pi]$

g) $f(x) = 1 - e^{-x}$ h) $f(x) = sinh(x)$ i) $f(x) = cosh(x)$

j) $f(x) = \theta(x)$

Eineindeutigkeit ist gleichbedeutend mit Bijektivität!
Die Lösungen beziehen sich auf den angegebenen Definitionsbereich.
(ganz $\mathbb{R}$ falls keine Angabe)

a) nicht bijektiv b) bijektiv c) bijektiv
d) bijektiv e) bijektiv f) bijektiv
g) bijektiv h) bijektiv i) nicht bijektiv
j) nicht bijektiv

Aufgabe 4.11: Umkehrfunktionen
Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen folgender Funktionen:

a) $f(x) = -2x - 2$ text b) $f(x) = 2 - 2x^2$ c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

d) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3$ e) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ f) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

a) $y(x) = \frac{-x-2}{2}$ $D = \mathbb{R}$

b) $y(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{2}}$ $x \leq 2$

c) $y(x) = 1 + \sqrt{x+4}$ $x \geq -4$

d) $y(x) = \sqrt[3]{3x+9}$ $D = \mathbb{R}$

e) $y(x) = 1 - \frac{1}{x}$ $x \neq 0$

f) $y(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ $0 < x < 1$

Aufgabe 4.12: Logarithmen:

a) Was ist $log_b(b)$?

b) Zeigen Sie, dass $ln(10) = \frac{1}{lg(e)}$ sowie $ln(2) = \frac{1}{ld(e)}$.

c) Berechnen Sie $ld(x)$ aus $ln(x)$.

d) Berechnen Sie $2,5^{2,5}$.

a) $= 1$ nach Defintion

b) $\log_b(y) = \log_b(z) \cdot \log_z(y)$

Setze in der Formel $y = b = 2$ $y = b = 10$ $z = e$

c) Setze in der Formel $y = x$ $b = 2$ $z = e$

d) ≈ 9.88

AUFGABE 4.13: Area-Funktionen

a) Zeigen Sie, daß aus $y = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ folgt: $x = sinh(y)$

b) Zeigen Sie, daß aus $y = \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ folgt $x = tanh(y)$

a) $\exp(y) = x + \sqrt{x^2+1} \quad \exp(-y) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow \quad \sinh(y) = \frac{\exp(y)-\exp(-y)}{2} = x$

b) $\exp(y) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad \exp(-y) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$\Rightarrow \quad \tanh(y) = \frac{\exp(y)-\exp(-y)}{\exp(y)+\exp(-y)} = x$

AUFGABE 4.14 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit von Funktionen
Berechnen Sie

a) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1+x}{1-x}$

b) $\lim_{x\to\pi} \frac{sin(x)}{x-\pi}$

c) $\lim_{x\to 0} (tan(x))^2$

d) Geben Sie den Funktionswert von f an der Stelle $x = 1$ an, der f zu einer stetigen Funktion macht:

$$f : x \longrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ ? & x = 1 \end{cases}$$

e) Sei $f(x) = \frac{3x+x^2}{x}$ für $x \neq 0$. Gibt es $b \in \mathbb{R}$ so dass nach Festsetzen von $f(0) = b$ die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist ?

a) $= 3$

b) $= \frac{0}{0} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)}{1} = -1$ nach de l'Hopital

c) $= 0$

d) $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 2$ macht die Funktion stetig.

e) $\frac{3x+x^2}{x} = 3+x \quad \Rightarrow \quad b = 3$

AUFGABE 4.15: Stetige Funktionen
Überprüfen Sie die Stetigkeit folgender Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$:

a)$f(x) = x$	b)$f(x) = x^2$	c)$f(x) = \frac{1}{1-x}$
d)$f(x) = x\,sin(x)$	e)$f(x) = x + e^{-x}$	f)$f(x) = \frac{sin(x)}{x}$
g)$f(x) = \frac{e^x-1}{x}$	h)$f(x) = \|x\|$	i)$f(x) = \theta(x+a)\theta(a-x)$
j)$f(x) = \theta(x)\theta(-x-a)$	k)$f(x) = \theta(x)e^{-x}$	l)$f(x) = \theta(x)xe^{-x}$

a)	stetig in $x = 0$	b)	stetig in $x = 0$	c)	stetig in $x = 0$
d)	stetig in $x = 0$	e)	stetig in $x = 0$	f)	stetig in $x = 0$
g)	stetig in $x = 0$	h)	stetig in $x = 0$	i)	stetig in $x = 0$
j)	unstetig in $x = 0$	k)	unstetig in $x = 0$	i)	stetig in $x = 0$