Universität Heidelberg

Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik

Übungen

Aufgaben zu Kapitel 5

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

Aufgabe 5.1: Differenzierbarkeit

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f(x)$ auf Differenzierbarkeit bei $x = 0$ $(a \in R)$:

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$

(d) $f(x) = e^{-|x|}$

(e) $\Theta(x + a)$

Aufgabe 5.2: Leiten Sie den Differentialquotienten des Cosinus her !

Aufgabe 5.3: Kettenregel

Berechnen Sie folgende Differentialquotienten nach der Kettenregel:

a) $(cos(x))' = (sin(\frac{\pi}{2} - x))'$ b) $(sin(x^2))'$

c) $(sin^2(x))'$ d) $(e^{-x})'$

e) $\left(e^{-x^2}\right)'$ f) $\left(\frac{1}{ax+b}\right)'$

g) $\left((2x^2 - x + 1)^3\right)'$ h) $\left(4\,(5 - 2x)^2\right)'$

i) $\left(5\,(3 - 7x^2)^3\right)'$ j) $\left(2x + (7 - 4x)^2\right)'$

k) $\left(\sqrt{x^4 - x^2}\right)'$ für $x^4 > x^2$

AUFGABE 5.4: Zeigen Sie mit der Umkehrfunktionsregel:

$(\text{arccot}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$

AUFGABE 5.5: Zeigen Sie mit der Umkehrfunktionsregel:

$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $|x| < 1$

AUFGABE 5.6: Zeigen Sie mit der Umkehrfunktionsregel:

$(\text{artanh}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$ für $|x| < 1$

$(\text{arcoth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$ für $|x| > 1$

AUFGABE 5.7: Zeigen Sie mit der Umkehrfunktionsregel:

$(\text{arsinh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ für $x \in R$

$(\text{arcosh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ für $x > 1$

AUFGABE 5.8:
Bestimmen Sie die erste Ableitung für die folgenden Funktionen $y = f(x)$ mit den Konstanten a,b,c und d:

a) $y = sin^3(4x)$	b) $y = exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$	c) $y = \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}}$
d) $y = ln\left(3e^{2x}\right)$	e) $y = a\,cosh\left[\frac{x-b}{a}\right]$	f) $y = ax^2e^{-bx}$
g) $y = cos(ax+b)sin(cx+d)$	h) $y = \frac{1}{1+(x/a)^2}$	i) $y = \left[\frac{sin(x/a)}{(x/a)}\right]^2$
j) $y = arctan(\frac{1}{x}) + \frac{x}{2}\left[ln(x^2) - ln(x^2+1)\right]$		

Berechnen Sie die ersten fünf Ableitungen folgender Funktionen $f(x)$:

k) $f(x) = sin(x)$	l) $f(x) = tan(x)$
m) $f(x) = e^x$	n) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

AUFGABE 5.9: Physikalische Differentiationen, Differentialgleichungen

Bilden Sie die erste $\dot{x}(t)$ und die zweite $\ddot{x}(t)$ Ableitung folgender Funktionen $x(t)$ der Zeit t mit den Konstanten $x_0, v_0, g, \omega, \omega_0, \gamma, \rho, b_0, w, m_0, \mu$:
Der Vergleich von $\ddot{x}(t)$ mit Kombinationen von $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ führt auf "Differentialgleichungen". Erkennen Sie die dadurch beschriebenen physikalischen Systeme ? Was haben die Konstanten für eine physikalische Bedeutung ?

(a) $x(t) = x_0 + v_0 t$

(b) $x(t) \;=\; x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

(c) $x(t) \;=\; x_0 cos(\omega t) \;+\; \frac{v_0}{\omega} sin(\omega t)$

(d) $x(t) \;=\; x_0 + \frac{v_0}{\rho} \left(1 - e^{-\rho t}\right)$

(e) $x(t) \;=\; x_0 - \frac{gt}{\rho} \;+\; \left(v_0 + \frac{g}{\rho}\right) \frac{\left(1 - e^{-\rho t}\right)}{\rho}$

(f) $x(t) \;=\; -\frac{1}{r}\, ln\left(cosh\left(-\sqrt{gr}t\right)\right)$

(g) $x(t) \;=\; x_0 cosh(\gamma t) \;+\; \frac{v_0}{\gamma} sinh(\gamma t)$

(h) $x(t) \;=\; e^{-\rho t}\left[x_0 cos(t\sqrt{\omega^2 - \rho^2}) + \frac{(v_0 + \rho x_0)}{\sqrt{\omega^2 - \rho^2}} sin(t\sqrt{\omega^2 - \rho^2})\right]$

(i) $x(t) \;=\; e^{-\rho t}\left[x_0 cosh(t\sqrt{\rho^2 - \omega^2}) + \frac{(v_0 + \rho x_0)}{\sqrt{\rho^2 - \omega^2}} sinh(t\sqrt{\rho^2 - \omega^2})\right]$

(j) $x(t) \;=\; \frac{b_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\rho^2}} cos\left[\omega t - arctan\left(\frac{2\omega\rho}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right]$

(k) $x(t) \;=\; x_0 tanh(\omega t)$

(l) $x(t) \;=\; \frac{w m_0}{\mu}\left(1 - \frac{\mu t}{m_0}\right) ln\left(1 - \frac{\mu t}{m_0}\right) \;-\; \frac{1}{2} g t^2 \;+\; wt$

Aufgabe 5.10: Partielle Ableitungen
Berechnen Sie

(a) $\frac{d}{dx_1}\left(x_1 + x_2 + x_3\right)$

(b) $\frac{d}{dx_1}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$

(c) $\frac{d}{dx_1}\left(x_1 x_2 x_3\right)$

(d) $\frac{d}{dx_1}\left(\frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right)$

(e) $\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)$

Aufgabe 5.11: Extrema

(a) Ein rechtwinkliges Viereck habe den Umfang L. Man soll die Seiten des Rechtecks mit dem grössten Flächeninhalt bei diesem Umfang bestimmen.

(b) Bestimmen Sie die Extrema der Funktionen

$$f(x) = -x^2 - 4x + 1 \tag{1}$$

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \quad (a, b, > 0) \tag{2}$$

(c) In welchem Punkt hat das elektrische Potential $U(x) = U_0\,(e^x - x)$ mit $U_0 > 0$ den kleinsten Wert ?

Aufgabe 5.12: Regel von l'Hospital
Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ln(x)}{x^\alpha}\right)$

(b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(ln(x))^\beta}{x^\alpha}$

(c) $\lim_{x\to o}\left(\frac{1}{sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$