Universität Heidelberg

Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik
Übungen

Aufgaben zu Kapitel 5
(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

Aufgabe 5.1: Differenzierbarkeit

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f(x)$ auf Differenzierbarkeit bei $x = 0$ ($a \in \mathbb{R}$):

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$

(d) $f(x) = e^{-|x|}$

(e) $\Theta(x + a)$

a) Ja.

b) Nein. Bei $x = 0$ nicht definiert.

c) Ja. Zum Beispiel durch die Reihenentwicklung des sinus(x) erklärbar.

d) Nein. Anschaulich klar, wenn man sich den Graphen vorstellt.

e) Ja. Die Steigung ist 0.

Aufgabe 5.2: Leiten Sie den Diffrentialquotienten des Cosinus her !

Nutze $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\frac{x+y}{2}) \cdot \sin(\frac{x-y}{2})$

$A = \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} = \frac{-2}{\Delta x} \cdot \sin(\frac{x+\Delta x+x}{2}) \cdot \sin(\frac{x+\Delta x-x}{2})$

$= -1 \cdot \sin(\frac{2x+\Delta x}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}$

$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} A = -\sin(x)$

Aufgabe 5.3: Kettenregel

Berechnen Sie folgende Differentialquotienten nach der Kettenregel:

a) $(cos(x))' = (sin(\frac{\pi}{2} - x))'$ b) $(sin(x^2))'$

c) $(sin^2(x))'$ d) $(e^{-x})'$

e) $\left(e^{-x^2}\right)'$ f) $(\frac{1}{ax+b})'$

g) $\left((2x^2 - x + 1)^3\right)'$ h) $\left(4\,(5 - 2x)^2\right)'$

i) $\left(5\,(3 - 7x^2)^3\right)'$ j) $\left(2x + (7 - 4x)^2\right)'$

k) $\left(\sqrt{x^4 - x^2}\right)'$ für $x^4 > x^2$

a) $f'(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = -\sin(x)$ b) $f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$

c) $f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ d) $f'(x) = -\exp(-x)$

e) $f'(x) = -2x \cdot \exp(-x^2)$ f) $f'(x) = \frac{-a}{ax+b^2}$

g) $f'(x) = 3 \cdot (2x^2 - x + 1)^2 \cdot (4x - 1)$ h) $f'(x) = 8 \cdot (5 - 2x) \cdot (-2)$

i) $f'(x) = 15 \cdot (3 - 7x^2)^2 \cdot (-14x)$ j) $f'(x) = 2 + 2 \cdot (7 - 4x) \cdot (-4)$

k) $f'(x) = \frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2}}$

Die Umkehrfunktionsregel lautet: $f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$

Setzen Sie einfach folgende Ableitungen in die obige Formel ein.

Aufgabe 5.4: Zeigen Sie mit der Umkehrfunktionsregel:

$(\text{arccot}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$

$$cot'(x) = -1 - cot^2(x)$$

$$arccot'(x) = \frac{1}{-1 - cot^2(arccot(x))} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Aufgabe 5.5: Zeigen Sie mit der Umkehrfunktionsregel:

$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $|x| < 1$

$$cos'(x) = -\sqrt{1 - cos(x)^2}$$
$$arccos'(x) = \frac{1}{-\sqrt{1-cos^2(arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aufgabe 5.6: Zeigen Sie mit der Umkehrfunktionsregel:

$(\text{artanh}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$ für $|x| < 1$

$(\text{arcoth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$ für $|x| > 1$

$$tanh'(x) = 1 - tanh(x)^2$$
$$artanh'(x) = \frac{1}{1-tanh^2(artanh(x))} = \frac{1}{1-x^2}$$
$$coth'(x) = 1 - coth(x)^2$$
$$arcoth'(x) = \frac{1}{1-coth^2(arcoth(x))} = \frac{1}{1-x^2}$$

Aufgabe 5.7: Zeigen Sie mit der Umkehrfunktionsregel:

$(\text{arsinh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ für $x \in R$

$(\text{arcosh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ für $x > 1$

$$sinh'(x) = \sqrt{1 + sinh(x)^2}$$
$$arsinh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+sinh^2(arsinh(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$cosh'(x) = \sqrt{cosh(x)^2 - 1}$$
$$arcosh'(x) = \frac{1}{\sqrt{-1+cosh^2(arcosh(x))}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Aufgabe 5.8:
Bestimmen Sie die erste Ableitung für die folgenden Funktionen $y = f(x)$ mit den Konstanten a,b,c und d:

a) $y = sin^3(4x)$

b) $y = exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$

c) $y = \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}}$

d) $y = ln\,(3e^{2x})$

e) $y = a\,cosh\left[\frac{x-b}{a}\right]$

f) $y = ax^2e^{-bx}$

g) $y = cos(ax+b)sin(cx+d)$

h) $y = \frac{1}{1+(x/a)^2}$

i) $y = \left[\frac{sin(x/a)}{(x/a)}\right]^2$

j) $y = arctan(\frac{1}{x}) + \frac{x}{2}\left[ln(x^2) - ln(x^2+1)\right]$

a) $f'(x) = 3 \cdot \sin(4x)^2 \cdot 4 \cdot \cos(4)$

b) $f'(x) = \exp(\frac{x^2}{a^2}) \cdot \frac{-2x}{a^2}$

c) $f'(x) = \frac{-ax}{(a \cdot x^2+b)^{-3/2}}$

d) $f'(x) = 2$

e) $f'(x) = \sinh(\frac{x-b}{a})$

f) $f'(x) = a \cdot \exp(-bx) \cdot (2x - bx^2)$

g) $f'(x) = -\sin(ax+b) \cdot \sin(cx+d)a + \cos(ax+b) \cdot \cos(cx+d)c$

h) $f'(x) = \frac{-2x}{a^2 \cdot (1+\frac{x^2}{a^2})}$

i) $f'(x) = 15 \cdot (3-7x^2)^2 \cdot (-14x)$

j) $f'(x) = 2 + 2 \cdot (7-4x) \cdot (-4)$

Berechnen Sie die ersten fünf Ableitungen folgender Funktionen $f(x)$:

k) $f(x) = sin(x)$ l) $f(x) = tan(x)$
m) $f(x) = e^x$ n) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

k)

$f^{(1)}(x) = \cos(x)$

$f^{(2)}(x) = -\sin(x)$

$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$

$f^{(4)}(x) = \sin(x)$

$f^{(5)}(x) = \cos(x)$

l)

$f^{(1)}(x) = 1 + \tan(x)^2$

$f^{(2)}(x) = 2\tan(x) + 2\tan(x)^3$

$f^{(3)}(x) = 2 + 4\tan(x)^2 + 6\tan(x)^4$

$f^{(4)}(x) = 16\tan(x) + 40\tan(x)^3 + 24\tan(x)^5$

$f^{(5)}(x) = 16 + 136\tan(x)^2 + 240\tan(x)^4 + 120\tan(x)^6$

m)

$f^{(1)}(x) = \exp(x)$

$f^{(2)}(x) = \exp(x)$

$f^{(3)}(x) = \exp(x)$

$f^{(4)}(x) = \exp(x)$

$f^{(5)}(x) = \exp(x)$

n)

$f^{(1)}(x) = 2x \cdot (1-x^2)^{-2}$

$f^{(2)}(x) = 2(3x^2+1) \cdot (1-x^2)^{-3}$

$f^{(3)}(x) = 24x \cdot (x^2+1) \cdot (1-x^2)^{-4}$

$f^{(4)}(x) = 24(1+10x^2+5x^4) \cdot (1-x^2)^{-5}$

$f^{(5)}(x) = 720(1+\frac{10}{3}x^2+x^4) \cdot (1-x^2)^{-6}$

AUFGABE 5.9: Physikalische Differentiationen, Differentialgleichungen

Bilden Sie die erste $\dot{x}(t)$ und die zweite $\ddot{x}(t)$ Ableitung folgender Funktionen $x(t)$ der Zeit t mit den Konstanten $x_0, v_0, g, \omega, \omega_0, \gamma, \rho, b_0, w, m_0, \mu$:
Der Vergleich von $\ddot{x}(t)$ mit Kombinationen von $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ führt auf "Differentialgleichungen". Erkennen Sie die dadurch beschriebenen physikalischen Systeme? Was haben die Konstanten für eine physikalische Bedeutung?

$$(a)\ x(t) = x_0 + v_0 t$$

$$(b)\ x(t) = x_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$(c)\ x(t) = x_0 cos(\omega t) + \tfrac{v_0}{\omega} sin(\omega t)$$

$$(d)\ x(t) = x_0 + \tfrac{v_0}{\rho}\left(1 - e^{-\rho t}\right)$$

$$(e)\ x(t) = x_0 - \tfrac{gt}{\rho} + \left(v_0 + \tfrac{g}{\rho}\right) \frac{\left(1 - e^{-\rho t}\right)}{\rho}$$

$$(f)\ x(t) = -\tfrac{1}{r}\, ln\left(cosh\left(-\sqrt{gr}t\right)\right)$$

$$(g)\ x(t) = x_0 cosh(\gamma t) + \tfrac{v_0}{\gamma} sinh(\gamma t)$$

$$(h)\ x(t) = e^{-\rho t}\left[x_0 cos(t\sqrt{\omega^2 - \rho^2}) + \tfrac{(v_0 + \rho x_0)}{\sqrt{\omega^2 - \rho^2}} sin(t\sqrt{\omega^2 - \rho^2})\right]$$

$$(i)\ x(t) = e^{-\rho t}\left[x_0 cosh(t\sqrt{\rho^2 - \omega^2}) + \tfrac{(v_0 + \rho x_0)}{\sqrt{\rho^2 - \omega^2}} sinh(t\sqrt{\rho^2 - \omega^2})\right]$$

$$(j)\ x(t) = \frac{b_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\rho^2}} cos\left[\omega t - arctan\left(\tfrac{2\omega\rho}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right]$$

$$(k)\ x(t) = x_0 tanh(\omega t)$$

$$(l)\ x(t) = \tfrac{w m_0}{\mu}\left(1 - \tfrac{\mu t}{m_0}\right) ln\left(1 - \tfrac{\mu t}{m_0}\right) - \tfrac{1}{2} g t^2 + w t$$

(a) $\ddot{x} = 0$

kräftefreie Bewegung

(b) $\ddot{x} = -g$

Freier Fall (FF) im Schwerefeld der Erde

(c) $\ddot{x} = -\omega \cdot x$

Klassischer Harmonischer Oszillator (HO)

(d) $\ddot{x} = -\rho \cdot \dot{x}$

gedämpfte freie Bewegung, Stokesreibung

(e) $\ddot{x} = -\rho \cdot \dot{x} - g$

gedämpfter freier Fall, Stokesreibung

(f) $\ddot{x} = r \cdot \dot{x}^2 - g$

gedämpfter freier Fall, Newtonreibung

(g) $\ddot{x} = \gamma^2 \cdot x$

ideal biegsames Seil, das reibungslos eine Tischkante hinuntergleitet

(h) $\ddot{x} = -2\rho \cdot \dot{x} - \omega^2 \cdot x$

HO, schwach gedämpft, Schwingfall

(i) $\ddot{x} = -2\rho \cdot \dot{x} - \omega^2 \cdot x$

HO, stark gedämpft, Kriechfall

(j) $\ddot{x} = -2\rho \cdot \dot{x} - \omega_0 \cdot x + b_0 \cdot \cos(\omega t)$

HO, gedämpft und durch externe Kraft zu Schwingungen angeregt

(k) $\ddot{x} = -2\omega \cdot {x_0}^{-1} \cdot x \cdot \dot{x}$

Bewegung in einer quartischen Potientalmulde

(l) $\ddot{x} = \omega \cdot \mu \cdot {m_0}^{-1} \cdot (1 - \mu t {m_0}^{-1}) - g$

Bewegung einer Rakete, die aus dem Stand von einer , mit der relativen Geschwindigkeit ω zum Raketenkörper der Masse m_0 , sekundlich ausgestoßenen Treibstoffmasse μ unter Vernachlässigung der Luftreibung im homogen angenommenen Schwerefeld der Erde senkrecht nach oben getrieben wird .

Aufgabe 5.10: Partielle Ableitungen
Berechnen Sie

(a) $\frac{d}{dx_1}\left(x_1 + x_2 + x_3\right) = 1$

(b) $\frac{d}{dx_1}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) = 2 \cdot x_1$

(c) $\frac{d}{dx_1}\left(x_1 x_2 x_3\right) = x_2 \cdot x_3$

(d) $\frac{d}{dx_1}\left(\frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\right) = \frac{2 \cdot x_2 \cdot ({x_2}^2 - {x_1}^2)}{({x_2}^2+{x_1}^2)^2}$

(e) $\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right) = \frac{-2x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2}$

Aufgabe 5.11: Extrema

(a) Ein rechtwinkliges Viereck habe den Umfang L. Man soll die Seiten des Rechtecks mit dem grössten Flächeninhalt bei diesem Umfang bestimmen.

(b) Bestimmen Sie die Extrema der Funktionen

$$f(x) = -x^2 - 4x + 1 \qquad (1)$$

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \quad (a, b, > 0) \qquad (2)$$

(c) In welchem Punkt hat das elektrische Potential $U(x) = U_0\left(e^x - x\right)$ mit $U_0 > 0$ den kleinsten Wert ?

(a) $L = 2a + 2b$ Fläche $A = a \cdot b = \frac{(L-2b)b}{2}$ $\longrightarrow$ maximum $\frac{dA}{db} = 0 \Rightarrow b = a = \frac{L}{4}$

(b1) Maximum bei $x = -2$

(b2) Maximum bei $x = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ und Minimum bei $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$

(c) kleinster Wert bei $x = 0$

Aufgabe 5.12: Regel von l'Hospital
Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ln(x)}{x^\alpha}\right)$

(b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(ln(x))^\beta}{x^\alpha}$

(c) $\lim_{x\to o}\left(\frac{1}{sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ln(x)}{x^\alpha}\right)=\infty$ für $\alpha\leq 0$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ln(x)}{x^\alpha}\right)=0$ für $\alpha\ >0$

(b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(ln(x))^\beta}{x^\alpha}=\infty$ für $\alpha\leq 0$, $\beta>0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{(ln(x))^\beta}{x^\alpha}=0$ für $\alpha>0$, $\beta>0$

(c) $\lim_{x\to o}\left(\frac{1}{sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to o}\left(\frac{x-\sin(x)}{sin(x)\cdot x}\right)$

$=\lim_{x\to o}\left(\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)\cdot x+\sin(x)}\right)$

$=\lim_{x\to o}\left(\frac{\sin(x)}{2\cos(x)-\sin(x)}\right)=0$