Universität Heidelberg

Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik

Übungen

Aufgaben zu Kapitel 6

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

Aufgabe 6.1 Berechenen Sie als Konsistenztest die Taylor-Reihe unseres Vorbildes $f(x) = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$ (um $x_0 = 0$).

$$f^{(n)}(x) = (n!) \cdot (1-x)^{-n-1} \quad f^{(n)}(0) = (n!)$$

$$\Rightarrow \; T_f(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Aufgabe 6.2 Berechnen Sie die Taylorreihen von $(1+x)^r$ für $r = -3,\ 1/3$ (um $x_0 = 0$).

$$r = -3: \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \tfrac{(n+2)!}{2} \cdot (1+x)^{-n-3} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot \tfrac{(n+2)!}{2}$$

$$\Rightarrow \; T_f(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \cdot \tfrac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} \cdot (-x)^n$$

$$r = \tfrac{1}{3}: \quad T_f(x) = 1 + \tfrac{1}{3} \cdot x^1 - \tfrac{1}{9} \cdot x^2 + \tfrac{5}{81} \cdot x^3 - \tfrac{10}{243} \cdot x^4 + \cdots$$

Aufgabe 6.3 Beweisen Sie die Taylorentwicklung des Cosinus (um $x_0 = 0$).

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \qquad f^{(2n+1)}(0) = 0$$

$$T_f(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

Aufgabe 6.4 Beweisen Sie die Taylorentwicklung von $\ln(1+x)$ (um $x_0 = 0$).

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot (n-1)!$$

$$T_f(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(x)^n}{n} \cdot (-1)^{(n+1)}$$

AUFGABE 6.5 Berechenen Sie die Taylorentwicklungen folgender Funktionen (um $x_0 = 0$):
a) cosh x,
b) einer "Gauss-Glocke": $exp(-x^2)$,
c) von $1/(1-x)^2$ durch gliedweise Differentiation der geometrischen Reihe.

a) $f^{(2n)}(x) = \cosh(x) \quad f^{(2n+1)}(x) = \sinh(x)$

$f^{(2n)}(0) = 1 \quad ; \quad f^{(2n+1)}(0) = 0$

$\Rightarrow \quad T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

b) Setze $y = -x^2$ in die Taylorentwicklung von $\exp(y)$ ein.

$\Rightarrow \quad T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n)!} \cdot (-1)^n$

c) $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^{(n-1)} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \cdot x^m$

AUFGABE 6.6 Berechnen Sie die ersten vier Terme der Taylorentwicklungen (um $x_0 = 0$) von
a) tan x durch Division der Reihen
b) $e^x \sin x$
c) $exp(sinx)$

a) Setze für die ersten Terme der Taylorentwicklung des Tangens

$\tan(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + O(x^8)$ an.

Mit $\tan(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n$

findet man durch Koeffizientenvergleich

$T_f(x) = 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + \frac{2}{15} \cdot x^5 + 0 \cdot x^6 + \frac{17}{315} \cdot x^7 + O(x^8)$

b) $f^{(1)}(x) = \exp(x) \cdot [\sin(x) + \cos(x)]$ $\quad f^{(2)}(x) = \exp(x) \cdot 2\cos(x)$

$f^{(3)}(x) = 2\exp(x) \cdot [\cos(x) - \sin(x)]$ $\quad f^{(4)}(x) = -4\exp(x) \cdot \sin(x)$

$f^{(5)}(x) = -4\exp(x) \cdot [\cos(x) + \sin(x)]$

$\Rightarrow T_f(x) = 0 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{30}x^5 + O(x^6)$

c) $f^{(1)}(x) = \exp(\sin(x)) \cdot \cos(x)$

$f^{(2)}(x) = \exp(\sin(x)) \cdot [\cos(x)^2 - \sin(x)]$

$f^{(3)}(x) = \exp(\sin(x)) \cdot [\cos(x)^3 - 3\cos(x) \cdot \sin(x) - \cos(x)]$

$f^{(4)}(x) = \exp(\sin(x)) \cdot [\cos(x)^4 - 6\cos(x)^2 \cdot \sin(x) - 4\cos(x)^2 + 3\sin(x)^2 + \sin(x)]$

$\Rightarrow T_f(x) = 0 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4 + O(x^5)$

Aufgabe 6.7 Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Taylorreihen um $x_0 = 0$:
a) $\cos(x)$ b) $\cosh(x)$ c) $1/(1-3x)$ d) $\ln(1+x)$ e) $\tan(x)$.

Konvergenzradius: $R = \lim_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{f^{(n)}(0)\cdot(n+1)}{f^{(n+1)}(0)}\right|\right)$

(a) $R = \lim_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{1\cdot(n+1)}{-1}\right|\right) = +\infty$

(b) $R = \lim_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{1\cdot(n+1)}{1}\right|\right) = +\infty$

(c) $f^n(0) = 3^n \cdot n!$ $\quad R = \lim_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{3^n\cdot n!\cdot(n+1)}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\right|\right) = \frac{1}{3}$

(d) $f^n(0) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!$ $\quad R = \lim_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{(n-1)!\cdot(n+1)}{n!}\right|\right) = 1$

(e) $R < \frac{\pi}{2}$; mehr wissen wir nicht.

AUFGABE 6.8 Entwickeln Sie um die Stelle $x_0 = 0$ bis zur ersten Ordung:
a) $(1+x)e^x$
b) $e^{-x}\sin(x)$
c) $(8+x)^{\frac{1}{3}}$
d) $\sin(x)\cos(x)$

e) $\frac{1}{\cosh(x)}$

(a) $T_f(x) = 1 + 2x$

(b) $T_f(x) = x$

(c) $T_f(x) = 2 + \frac{x}{12}$

(d) $T_f(x) = x$

(e) $T_f(x) = 1$