Universität Heidelberg

Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik

Übungen

Aufgaben zu Kapitel 7

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

Aufgabe 7.1: Differentiationstabelle rückwärts

Berechnen Sie folgende Beispiele von Integralen ($a, n \in Z$):

a) $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ c) $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

d) $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ e) $\int_{-a}^a cosh(x) dx$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2(x)} dx$

g) $\int_1^2 \frac{1}{x^{1+a}} dx$ h) $\int_{-a}^a x^{2n+1} dx$ für $n \in Z$

Aufgabe 7.2 Bestimme Sie die Scharen der Stammfunktionen $F(x)$ folgender Funktionen $f(x)$:

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ c) $f(x) = sinh(x)$

d) $f(x) = 2^x$

Aufgabe 7.3 Bestimmen Sie die Stammfunktionen von folgenden Funktionen $f(x)$ mit den angegebenen Randbedingungen:

a)$f(x) = \sin(x)$ mit $F(\pi) = 1$ b)$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ mit $F(4) = 1$

c)$f(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$ mit $F(a) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 7.4 Integrieren Sie durch lineare Zerlegung:

$$\int_{-1}^{1} \left(1 + 2x^3\right)^3 dx$$

Aufgabe 7.5 Berechnen Sie folgende Integrale durch Substitution ($a, A, b, r \in R, a > 0$):

a)	$\int \frac{dx}{ax+b}$	b)	$\int_0^t e^{-2x/a} dx$	c)	$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$
d)	$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2} dx$	e)	$\int \dot{x}(t) dt$	f)	$\int_{-a}^a \cosh(x/A) dx$

Aufgabe 7.6 Zeigen Sie für $n \in N$

$$\int_{y_a}^{y_b} dy\; g'(y)\,(g(y))^n = \left[\frac{(g(y))^{n+1}}{n+1}\right]_{y_a}^{y_b}$$

Leiten Sie aus dieser Formel weitere ab, indem Sie g(y) spezifizieren, z.B. für ($a, b \in R, a, b > 0$)

a)	$g(y) = ay \pm b$	b)	$g(y) = \sin y$
c)	$g(y) = y^2 \pm b$	d)	$g(y) = \ln(y)$

Aufgabe 7.7 Beweisen Sie analog wie oben die Formel (für $1 < n \in I\!N$)

$$\int_{y_a}^{y_b} dy\; g'(y) \sqrt[n]{g(y)} = \left[\frac{n\, g(y) \sqrt[n]{g(y)}}{n+1}\right]_{y_a}^{y_b}$$

und spezifizieren Sie darin g(y) wie in Aufgabe 7.6 a) und b).

Aufgabe 7.8 Was erhält man analog für $\int_{y_a}^{y_b} dy\; g'(y)/\left(g(y)\right)^n$ mit $n \in I\!N$, $n > 1$?

Aufgabe 7.9 Weitere Beispiele ($0 \neq \omega, a, b, c \in R, n \in N$):

a)	$\int_a^{a+\frac{2\pi}{\omega}} \cos \omega t\; dt$	b)	$\int \sqrt{1+x^2}\; dx$	c)	$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{az+b}}\; dz$
d)	$\int \dot{x}(t) x(t) dt$	e)	$\int_{-a}^a \sinh(2x/b)\; dx$	f)	$\int \sqrt{x \pm b}\; dx$
g)	$\int_{-a}^a \frac{dx}{x^{2n+1}}$	h)	$\int \frac{dx}{x^{1-n}}$	i)	$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\phi)}{\cos^2(\phi)+1} d\phi$
j)	$\int x\sqrt{x^2 \pm a}\; dx$	k)	$\int \frac{x+\frac{b}{2a}}{(ax^2+bx+c)^3} dx$	l)	$\int \frac{x}{1+x^4} dx$

Aufgabe 7.10 Integrieren Sie folgende Integrale partiell ($0 < y \in R$):

a)	$\int_0^y \sin(x)\, e^{-x} dx$	b)	$\int_0^y \cos(x)\, e^{-x} dx$	c)	$\int \arcsin(x) dx$
d)	$\int x\sqrt{1+x}\, dx$	e)	$\int x^3 e^{x^2}\, dx$	f)	$\int x^2 \ln(x)\, dx$
g)	$\int \ln(x^2+1)\, dx$				

und beweisen Sie folgende nützliche Rekursionsformeln für $n \in I\!N$:

h) $\int f'(x)x^n\,dx \;=\; f(x)x^n - n\int f(x)x^{n-1}\,dx$

i) $\int \frac{g(x)}{x^n}\,dx \;=\; \frac{-1}{(n-1)}\frac{g(x)}{x^{n-1}} \;+\; \int \frac{g'(x)}{(n-1)x^{n-1}}\,dx \quad$ für $n \neq 1$

j) $\int \sin^n(x)\,dx \;=\; \frac{-1}{n}\cos(x)\sin^{n-1}(x) \;+\; \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx$

k) $\int (1 \pm x^2)^n \;=\; \frac{1}{2n+1}x(1 \pm x^2)^n \;+\; \frac{2n}{2n+1}\int (1 \pm x^2)^{n-1}dx$

Aufgabe 7.11 und Aufgabe 7.12 siehe K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik !

Aufgabe 7.13 Lösen Sie das Integral $\int \frac{dx}{\Gamma(x)}$ mit $\Gamma(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ für $0 \neq a, b, c \in R$.
Tip: quadratische Ergänzung

Aufgabe 7.14 Zeigen Sie durch eine geeignete Substitution, dass auch die Integrale $\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,dx$ $(0 \neq k \in R)$ und $\int_0^y \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$ elliptische Integrale sind.

Aufgabe 7.15 Versuchen Sie folgende uneigentliche Integrale der ersten Art zu berechnen $(a \in R)$:

a) $\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$ b) $\int_0^\infty e^{-x}dx$ c) $\int_0^\infty dx/(1+x)$

d) $\int_0^\infty \cos x\,dx$ e) $\int_0^\infty \cos x\,e^{-x}dx$

Aufgabe 7.16 Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{-2/\pi} \frac{\sin(1/x)}{x^2}\,dx$ und $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(1+x^4)}\,dx$.

Aufgabe 7.17 Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)}\,dx$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^4)}\,dx$.

Aufgabe 7.18 Versuchen Sie folgende uneigentlichen Integrale der zweiten Art zu berechnen $(0 < b \in R)$:

a) $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$ b) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)}}\,dx$ c) $\int_0^b \frac{1}{x^3}\,dx$

Aufgabe 7.19 Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx$ und $\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$.

Aufgabe 7.20 Berechnen Sie die Hauptwerte $\mathrm{P}\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\,dx$ und $\mathrm{P}\int_0^{\pi} \tan x\,dx$.

Aufgabe 7.21 Zeigen Sie, dass aus dem uneigentlichen Integral zweiter Art $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ durch die Substitution $x = 1/y^2$ ein uneigentliches Integral erster Art entsteht.