Universität Heidelberg

MATHEMATISCHER VORKURS
ZUM STUDIUM DER PHYSIK

ÜBUNGEN

Aufgaben zu Kapitel 7

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

AUFGABE 7.1: Differentiationstabelle rückwärts

Berechnen Sie folgende Beispiele von Integralen ($a, n \in \mathbb{Z}$):

a) $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ c) $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

d) $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ e) $\int_{-a}^a cosh(x) dx$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2(x)} dx$

g) $\int_1^2 \frac{1}{x^{1+a}} dx$ h) $\int_{-a}^a x^{2n+1} dx$

a) $\int_1^3 \frac{1}{x} dx = [ln(x)]_1^3 = ln(3) - ln(1) = ln(3)$

b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [arctan\, x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$

c) $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [arcsinh\, x]_0^b = arcsinh\, b$

siehe Aufg.5.7

d) $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [arcsin\, x]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$

e) $\int_{-a}^a cosh(x) dx = [sinh\, x]_{-a}^a = 2\, sinh\, a$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2(x)} dx = [tan\, x]_0^{\pi/4} = tan\, \frac{\pi}{4} = 1$

g) $\int_1^2 \frac{1}{x^{1+a}} dx = \frac{-1}{a\, x^a} = \frac{1}{a}(1 - \frac{1}{2^a})$ für $a \neq 0$

h) $\int_{-a}^a x^{2n+1} dx = \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_{-a}^a = 0$ für $n \in \mathbb{N}$

für $n < 0$ ist der Integrand bei 0 nicht beschränkt.

Aufgabe 7.2 Bestimme Sie die Scharen der Stammfunktionen $F(x)$ folgender Funktionen $f(x)$:

$$\text{a)}\quad f(x) = x^3 \quad \text{b)}\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{c)}\quad f(x) = sinh(x)$$

$$\text{d)}\quad f(x) = 2^x$$

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$

b) $F(x) = arccosh(x) + c$

c) $F(x) = cosh(x) + c$

d) $f(x) = 2^x = e^{x\, ln\, 2} \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{ln\, 2} + c$

Aufgabe 7.3 Bestimmen Sie die Stammfunktionen von folgenden Funktionen $f(x)$ mit den angegebenen Randbedingungen:

$$\text{a)} f(x) = \sin(x) \quad \text{mit } F(\pi) = 1 \qquad \text{b)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{mit } F(4) = 1$$

$$\text{c)} f(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \quad \text{mit } F(a) = \frac{1}{2}$$

a) $F(x) = -cos\, x + c$
$F(\pi) = -cos\, \pi + c = 1 + c \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c = 0$

b) $F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$F(4) = 2 \cdot 2 + c = 4 + c \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c = -3$

c) $F(x) = tanh\, x + c$
$F(a) = tanh\, a + c \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2} - tanh\, a$

Aufgabe 7.4 Integrieren Sie durch lineare Zerlegung:

$$\int_{-1}^{1} \left(1 + 2x^3\right)^3 dx$$

$\int_{-1}^{1} \left(1 + 2x^3\right)^3 dx = \int_{-1}^{1} (1 + 6x^3 + 12x^6 + 8x^9 = \left[x + 6\frac{x^4}{4} + 12\frac{x^7}{7} + 8\frac{x^{10}}{10}\right]_{-1}^{1} = \frac{38}{7}$

Aufgabe 7.5 Berechnen Sie folgende Integrale durch Substitution ($a, A, b, r \in \mathbb{R}, a > 0$):

a)	$\int \frac{dx}{ax+b}$	b)	$\int_0^t e^{-2x/a}dx$	c)	$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$
d)	$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$	e)	$\int \dot{x}(t)dt$	f)	$\int_{-a}^{a} \cosh(x/A)dx$

a) mit $y = ax + b$ und $\frac{dy}{dx} = a$ folgt:

$\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{1}{y} \frac{dx}{dy} dy = \frac{1}{a} \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{a} ln\,|y| + c = \frac{1}{a} ln\,|ax+b| + c$

b) mit $y = -\frac{2x}{a}$ und $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{a}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-2x/a}dx &= \int_0^{-2t/a} e^y \frac{dx}{dy} dy \\
&= -\frac{a}{2} \int_0^{-2t/a} e^y dy \\
&= \frac{a}{2} \int_{-2t/a}^{0} e^y dy \\
&= \frac{a}{2} [e^y]_{-2t/a}^{0} \\
&= \frac{a}{2}(1 - e^{-\frac{2t}{a}})
\end{aligned}$$

c) mit $y = arcsin(x)$ oder $x = sin(y)$ und $\frac{dx}{dy} = cos(y)$ folgt:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{arcsin(0)}^{arcsin(1)} \sqrt{1-sin^2(y)}\frac{dx}{dy}dy \\
&= \int_0^{\pi/2} cos^2(y)dy \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + cos(2y))dy
\end{aligned}$$

(letzter Schritt mit Hilfe des Additionstheorems)

$$\begin{aligned}
cos(a \pm b) &= cos(a)\,cos(b) \mp sin(a)\,sin(b) \\
\Rightarrow \quad cos(2y) &= cos^2 y - sin^2 y = 2 \cdot cos^2 y - 1
\end{aligned}$$

mit $z = 2y$ und $\frac{dz}{dy} = 2$ folgt:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \left[\frac{y}{2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos(z)\frac{dy}{dz}dz \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\,[sin(z)]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

d) $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \quad = \quad \int_0^r r\,\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}\,dx$

mit $y = \frac{x}{r}$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{r}$ folgt:

$$= \quad r^2 \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy \quad = \quad r^2 \frac{\pi}{4} \quad \text{siehe Aufg. c)}$$

e) $\int \dot{x} dt = \int \frac{dx}{dt} dt = \int dx = x(t) + c$

f) mit $y = \frac{x}{A}$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{A}$ folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} \cosh\left(\frac{x}{A}\right) dx &= \int_{-a/A}^{a/A} cosh(y) \frac{dx}{dy} dy \\ &= A\,[sinh(y)]_{-a/A}^{a/A} \\ &= 2A\,sinh\left(\frac{a}{A}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 7.6 Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{y_a}^{y_b} dy\; g'(y)\,(g(y))^n = \left[\frac{(g(y))^{n+1}}{n+1}\right]_{y_a}^{y_b}$$

$\int_{y_a}^{y_b} dy\; g'(y) g^n(y) = \int_{y_a}^{y_b} dy\; \frac{dg}{dy}\, g^n(y) = \int_{g(y_a)}^{g(y_b)} dg\; g^n(y) = \frac{g^{n+1}(y_b) - g^{n+1}(y_a)}{n+1}$

Leiten Sie aus dieser Formel weitere ab, indem Sie g(y) spezifizieren, z.B. für $(a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0)$

a) $g(y) = ay \pm b$ b) $g(y) = \sin y$

c) $g(y) = y^2 \pm b$ d) $g(y) = \ln(y)$

a) $\int dy\; g'(y) g^n(y) = \int dy\; a\,(ay \pm b)^n = \frac{(ay\pm b)^{n+1}}{n+1} + c$

b) $\int dy\; g'(y) g^n(y) = \int dy\; cos(y)\, sin^n(y) = \int dy\; \frac{d(sin(y))}{dy}\, sin^n(y) = \int d(sin(y))\, sin^n(y)$

mit $z = sin(y)$ folgt:
$\int dy\; g'(y) g^n(y) = \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c = \frac{sin^{n+1}(y)}{n+1} + c$

c) $\int dy\; g'(y) g^n(y) = \int dy\; 2y\,(y^2 \pm b)^n = \frac{(y^2\pm b)^{n+1}}{n+1} + c$

d) $\int dy\; g'(y) g^n(y) = \int dy\; \frac{1}{y}\, ln^n(y) = \frac{ln^{n+1}(y)}{n+1} + c$

AUFGABE 7.7 Beweisen Sie analog wie oben die Formel (für $1 < n \in \mathbb{N}$)

$$\int_{y_a}^{y_b} dy\, g'(y)\, \sqrt[n]{g(y)} = \left[\frac{n\, g(y)\, \sqrt[n]{g(y)}}{n+1}\right]_{y_a}^{y_b}$$

$$\begin{aligned}
\int_{y_a}^{y_b} dy\, g'(y)\, \sqrt[n]{g(y)} &= \int_{y_a}^{y_b} dy\, \frac{dg}{dy}\, g^{\frac{1}{n}}(y) \\
&= \int_{g(y_a)}^{g(y_b)} g^{\frac{1}{n}}(y)\, dg \\
&= \left[\frac{g^{\frac{1}{n}+1}(y)}{\frac{1}{n}+1}\right]_{y_a}^{y_b} \\
&= \left[\frac{g^{\frac{1}{n}}(y)\, g(y)}{\frac{n+1}{n}}\right]_{y_a}^{y_b} \\
&= \left[\frac{n\, g(y)\, \sqrt[n]{g(y)}}{n+1}\right]_{y_a}^{y_b}
\end{aligned}$$

und spezifizieren Sie darin g(y) wie in Aufgabe 7.6 a) und b).

a) $\int dy\, g'(y)\, \sqrt[n]{g(y)} = \int dy\, a\, \sqrt[n]{ay \pm b} = \frac{n}{n+1}(ay \pm b)\, \sqrt[n]{ay \pm b} + c$

b) $\int dy\, g'(y)\, \sqrt[n]{g(y)} = \int dy\, cos(y)\, \sqrt[n]{sin(y)} = \frac{n}{n+1} sin(y)\, \sqrt[n]{sin(y)} + c$

AUFGABE 7.8 Was erhält man analog für $\int_{y_a}^{y_b} dy\, g'(y)/\,(g(y))^n$ mit $n \in I\!N$, $n > 1$?

$$\int_{y_a}^{y_b} dy\, \frac{g'(y)}{g^n(y)} = \int_{y_a}^{y_b} dy\, \frac{dg}{dy}\, \frac{1}{g^n(y)} = \int_{g(y_a)}^{g(y_b)} g^{-n}\, dg = \left[\frac{g^{-n+1}(y)}{-n+1}\right]_{y_a}^{y_b} = \frac{-1}{n-1}\left[\frac{1}{g^{n-1}(y)}\right]_{y_a}^{y_b}$$

AUFGABE 7.9 Weitere Beispiele ($0 \neq \omega, a, b, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$):

a)	$\int_a^{a+\frac{2\pi}{\omega}} \cos \omega t\, dt$	b)	$\int \sqrt{1+x^2}\, dx$	c)	$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{az+b}}\, dz$
d)	$\int \dot{x}(t)x(t)dt$	e)	$\int_{-a}^{a} \sinh(2x/b)\, dx$	f)	$\int \sqrt{x \pm b}\, dx$
g)	$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x^{2n+1}}$	h)	$\int \frac{dx}{x^{1-n}}$	i)	$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\phi)}{\cos^2(\phi)+1} d\phi$
j)	$\int x\sqrt{x^2 \pm a}\, dx$	k)	$\int \frac{x+\frac{b}{2a}}{(ax^2+bx+c)^3} dx$	l)	$\int \frac{x}{1+x^4} dx$

a) Mit $y = \omega t$ und $\frac{dy}{dt} = \omega$ folgt:

$\int_a^{a+\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega t)\, dt = \int_{\omega a}^{\omega a+2\pi} cos(y)\, \frac{dt}{dy} dy = \left[-\frac{1}{\omega} sin(y)\right]_{\omega a}^{\omega a+2\pi} = 0$

weil der Sinus 2π-periodisch ist.

b) Mit $y = arcsinh(x)$ bzw. $x = sinh(y)$ und $\frac{dx}{dy} = cosh(y)$ folgt:

$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \sqrt{1+sinh^2(y)}\, \frac{dx}{dy}\, dy = \int \sqrt{cosh^2(y)}\, cosh(y)\, dy = \int cosh^2(y)\, dy$

wegen $cosh^2 x - sinh^2 x = 1$.

Mit Hilfe der Additionstheoreme:

$sinh(a+b) = sinh(a)cosh(b) + sinh(b)cosh(a)$
$cosh(a+b) = cosh(a)cosh(b) + sinh(a)sinh(b)$

$\Rightarrow cosh^2(x) = \frac{1}{2}(1 + cosh(2x))$ (wie in Aufg. 7.5c)

und $sinh(2a) = 2sinh(a)cosh(a)$ folgt nun:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int (1 + cosh(2y))\, dy \\
&= \frac{1}{2}(y + \frac{1}{2}sinh(2y)) + c \\
&= \frac{1}{2}\left(y + sinh(y)cosh(y)\right) + c \\
&= \frac{1}{2}\left(y + sinh(y)\sqrt{1+sinh^2(y)}\right) + c \\
&= \frac{1}{2}\left(arcsinh(x) + x\sqrt{1+x^2}\right) + c
\end{aligned}$$

c) Mit $x = az + b$ und $\frac{dx}{dz} = a$ folgt:
$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{az+b}}\, dz = \int_{-a+b}^{+a+b} \frac{1}{\sqrt{x}}\, \frac{dz}{dx}\, dx = \frac{1}{a}\int_{-a+b}^{+a+b} x^{-1/2} dx = \frac{1}{a}\left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_{-a+b}^{a+b} = \frac{2}{a}\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{b-a}\right)$

d) $\int \dot{x}(t)x(t)dt = \int \frac{dx}{dt}x(t)dt = \int x(t)dx = \frac{1}{2}x^2(t) + c$

e) Mit $y = \frac{2x}{b}$ und $\frac{dy}{dx} = 2/b$ folgt:

$\int_{-a}^{a} \sinh(2x/b)\, dx = \int_{-2a/b}^{2a/b} sinh(y)\, \frac{dy}{dx}\, dy = \frac{2}{b}\left[cosh(y)\right]_{-2a/b}^{2a/b} = 0$

Integrale von ungeraden Funktionen verschwinden immer über symmetrische Intervalle.

f) Mit $y = x \pm b$ und $\frac{dy}{dx} = 1$ folgt:

$\int \sqrt{x \pm b}\, dx = \int y^{1/2}\, dy = \frac{2}{3}y^{3/2} + c = \frac{2}{3}(x \pm b)^{3/2} + c$

g) Da der Integrand $\frac{1}{x^{2n+1}}$ innerhalb des zu integrierenden Intervalls nicht definiert ist, kann man das Integral $\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x^{2n+1}}$ nicht ausrechnen, obwohl normalerweise Integrale von ungeraden Funktionen über symmetrische Intervalle verschwinden. Deshalb nur die Berechnung des uneigentlichen Integrals:

$\int \frac{dx}{x^{2n+1}} = -\frac{1}{2n} x^{-2n}$

h) Fallunterscheidung:

(i) $n = 0 : \int \frac{1}{x^{1-n}}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = ln\, x$

(ii) $n \neq 0 : \int \frac{1}{x^{1-n}}\, dx = \int x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n} x^n + c$

i) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\phi)}{\cos^2(\phi)+1} d\phi = 0$ da ungerader Integrand über symm. Intervall

j) $\int x \sqrt{x^2 \pm a}\, dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a)\sqrt{x^2 \pm a} + c$ nach Aufgabe 7.7 $\int_{y_a}^{y_b} dy\, g'(y) \sqrt[n]{g(y)} = \left[\frac{n\, g(y) \sqrt[n]{g(y)}}{n+1}\right]_{y_a}^{y_b}$ mit $y = x$, $g(y) = x^2 \pm a$ und $n = 2$

k) $\int \frac{x+\frac{b}{2a}}{(ax^2+bx+c)^3} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^3} dx = -\frac{1}{4a} \frac{1}{(ax^2+bx+c)^2}$ nach Aufgabe 7.8 $\int_{y_a}^{y_b} dy\, \frac{g'(y)}{g^n(y)} = \frac{-1}{n-1} \left[\frac{1}{g^{n-1}(y)}\right]_{y_a}^{y_b}$ mit $y = x$, $g(y) = ax^2 + bx + c$ und $n = 3$

l) Mit $y = x^2$ und $\frac{dy}{dx} = 2x$ folgt:

$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} arctan(y) + c = \frac{1}{2} arctan(x^2) + c$

Aufgabe 7.10 Integrieren Sie folgende Integrale partiell ($0 < y \in \mathbb{R}$):

a) $\int_0^y \sin(x)\, e^{-x} dx$ b) $\int_0^y \cos(x)\, e^{-x} dx$ c) $\int \arcsin(x) dx$

d) $\int x \sqrt{1+x}\, dx$ e) $\int x^3\, e^{x^2}\, dx$ f) $\int x^2 \ln(x)\, dx$

g) $\int \ln(x^2+1)\, dx$

und beweisen Sie folgende nützliche Rekursionsformeln für $n \in I\!N$:

h) $\int f'(x) x^n\, dx = f(x) x^n - n \int f(x) x^{n-1}\, dx$

i) $\int \frac{g(x)}{x^n}\, dx = \frac{-1}{(n-1)} \frac{g(x)}{x^{n-1}} + \int \frac{g'(x)}{(n-1)x^{n-1}}\, dx$ für $n \neq 1$

j) $\int \sin^n(x)\, dx = \frac{-1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x)\, dx$

k) $\int (1 \pm x^2)^n = \frac{1}{2n+1} x(1 \pm x^2)^n + \frac{2n}{2n+1} \int (1 \pm x^2)^{n-1} dx$

Partielle Integration $\int_b^a f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$

a) Man löst die Aufgabe mit Hilfe von 7.10b:
Wähle $f(x) = e^{-x}$ und $g'(x) = sin(x)$, da man sonst immer im Kreis rechnet

$$\begin{aligned} \int_0^y \sin(x)\,e^{-x}dx &= \left[-cos(x)\,e^{-x}\right]_0^y - \int_0^y cos(x)\,e^{-x}\,dx \\ &= 1 - cos(y)\,e^{-y} - \int_0^y cos(x)\,e^{-x}\,dx \end{aligned}$$

dann erstmal weiter mit 7.10b

b) Man wähle $f(x) = e^{-x}$ und $g'(x) = cos(x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^y \cos(x)\,e^{-x}dx &= [sin(x)\,e^{-x}]_0^y + \int_0^y sin(x)\,e^{-x}\,dx \\ &= sin(y)\,e^{-y} + 1 - cos(y)\,e^{-y} - \int_0^y cos(x)\,e^{-x}dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 2\int_0^y cos(x)\,e^{-x}dx = 1 + sin(y)\,e^{-y} - cos(y)\,e^{-y}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^y cos(x)\,e^{-x}dx = \frac{1}{2}(1 + sin(y)\,e^{-y} - cos(y)\,e^{-y})$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^y sin(x)\,e^{-x}dx = \frac{1}{2}(1 - sin(y)\,e^{-y} - cos(y)\,e^{-y}) \qquad \text{Lösung für Aufg.7.10a}$$

c) Wähle $f(x) = arcsin(x)$ und $g'(x) = 1$:

$\int \arcsin(x)\cdot 1\,dx = arcsin(x)\,x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\cdot arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$

nach Aufg.7.7:

$\frac{1}{2}\int_{y_a}^{y_b} dy\; g'(y)\,\sqrt[n]{g(y)} = \frac{1}{2}\left[\frac{n\,g(y)\,\sqrt[n]{g(y)}}{n+1}\right]_{y_a}^{y_b}$

mit $y = x$, $g(y) = 1 - x^2$, $g'(y) = -2x$, $n = -2$

d) Wähle $f(x) = x$ und $g'(x) = \sqrt{1+x}$:

$$\begin{aligned} \int x\,\sqrt{1+x}\,dx &= x\,\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{3/2}dx \\ &= \frac{2}{3}\left[x(1+x)^{3/2} - \frac{2}{5}(1+x)^{5/2}\right] + c \\ &= \frac{2}{15}(1+x)^{3/2}(3x-2) + c \end{aligned}$$

e) Wähle $f(x) = x^2$ und $g'(x) = x\,e^{x^2}$:

$$\begin{aligned}
\int x^3\,e^{x^2}\,dx &= \int x^2 \cdot x\,e^{x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int 2x\,\frac{1}{2}e^{x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\,e^{x^2} - \int x\,e^{x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\,e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + c \\
&= \frac{1}{2}(x^2-1)\,e^{x^2} + c
\end{aligned}$$

f) Wähle $f(x) = ln\,x$ und $g'(x) = x^2$:

$\int x^2\ \ln\ x\,dx = \frac{x^3}{3}ln\,x - \frac{1}{3}\int x^3\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}ln\,x - \frac{x^3}{9} + c$

g) Wähle $f(x) = ln(x^2+1)$ und $g'(x) = 1$:

$$\begin{aligned}
\int \ln(x^2+1)\,dx &= x\,ln(x^2+1) - \int x\,\frac{2x}{x^2+1}dx \\
&= x\,ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx \\
&= x\,ln(x^2+1) - 2\int dx + 2\int \frac{dx}{x^2+1} \\
&= x\,ln(x^2+1) - 2x + 2arctan(x) + c
\end{aligned}$$

h) Mit $(f(x)x^n)' = \frac{d}{dx}(f(x)x^n) = f'(x)x^n + f(x)\cdot n\cdot x^{n-1}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\int dx\,\tfrac{d}{dx}(f(x)\,x^n) &&= \int dx\,f'(x)\,x^n + \int dx\,f(x)\cdot n\cdot x^{n-1} \\
\Rightarrow\quad &f(x)\,x^n &&= \int f'(x)\,x^n dx + n\int f(x)\,x^{n-1}dx \\
\Rightarrow\quad &\int f'(x)x^n\,dx &&= f(x)x^n - n\int f(x)x^{n-1}\,dx
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}\int \frac{g(x)}{x^n}\,dx &= \int x^{-n} g(x)\,dx \\ &= \frac{x^{-n+1}}{-n+1} g(x) - \int (-\frac{x^{-n+1}}{-n+1}) g'(x)\,dx \\ &= \frac{-1}{(n-1)}\frac{g(x)}{x^{n-1}} + \int \frac{g'(x)}{(n-1)x^{n-1}}\,dx \quad \text{für } n \neq 1\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}\int \sin^n(x)\,dx &= \int sin\,x \cdot sin^{n-1}\,x\,dx \\ &= -cos\,x \cdot sin^{n-1}x - \int (-cos\,x)\left((n-1)\,sin^{n-2}x \cdot cos\,x\right) dx \\ &= -cos\,x \cdot sin^{n-1}x + (n-1)\int cos^2x\,sin^{n-2}x\,dx \\ &= -cos\,x \cdot sin^{n-1}x + (n-1)\int \left(1 - sin^2x\right) sin^{n-2}x\,dx \\ &= -cos\,x \cdot sin^{n-1}x + (n-1)\int sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int sin^n x\,dx \\ \Rightarrow \quad n\int sin^n x\,dx &= -cos\,x \cdot sin^{n-1}x + (n-1)\int sin^{n-2}x\,dx \\ \Rightarrow \quad \int sin^n x\,dx &= -\frac{1}{n}\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}\int (1 \pm x^2)^n\,dx &= \int 1 \cdot (1 \pm x^2)^n\,dx \\ &= x(1 \pm x^2)^n - \int x \cdot \left[n\,(\pm 2x)\,(1 \pm x^2)^{n-1}\right] dx \\ &= x(1 \pm x^2)^n - 2n \int (\pm x^2 + 1 - 1)\,(1 \pm x^2)^{n-1} dx \\ &= x(1 \pm x^2)^n - 2n \left[\int (1 \pm x^2)^n dx - \int (1 \pm x^2)^{n-1} dx\right] \\ \Rightarrow \quad (1+2n)\int (1 \pm x^2)^n\,dx &= x(1 \pm x^2)^n + 2n \int (1 \pm x^2)^{n-1} dx \\ \Rightarrow \quad \int (1 \pm x^2)^n\,dx &= \frac{1}{2n+1} x(1 \pm x^2)^n + \frac{2n}{2n+1}\int (1 \pm x^2)^{n-1} dx\end{aligned}$$

AUFGABE 7.11 und AUFGABE 7.12 siehe K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik !

Die Aufgaben müssen nicht gerechnet werden!

AUFGABE 7.13 Lösen Sie das Integral $\int \frac{dx}{\Gamma(x)}$ mit $\Gamma(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ für $0 \neq a, b, c \in \mathbb{R}$.
Tip: quadratische Ergänzung

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\Gamma(x)} &= \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2}}
\end{aligned}
$$

Mit $y = x + \frac{b}{2a}$ und $\Delta = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}$:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \Delta}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{\sqrt{\Delta}}\right)^2}} \qquad \text{für } a < 0 \text{ und } \Delta > 0
\end{aligned}
$$

Mit $z = \frac{y}{\sqrt{\Delta}}$ und $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$:

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\Delta}{-a}} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}}{-a}} arcsin(z) + konst \\
&= \sqrt{\frac{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}}{-a}} arcsin\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{\sqrt{(\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}}}\right) + konst \\
&= \sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^3}} arcsin\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right) + konst
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7.14 Zeigen Sie durch eine geeignete Substitution, dass auch die Integrale $\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,dx$ $(0 \neq k \in \mathbb{R})$ und $\int_0^y \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$ elliptische Integrale sind.

Elliptische Integrale: $F(k;y) = \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-(kx)^2)}}$ werden bei Pendelschwingungen gebraucht. Sie sind analytisch nicht lösbar.

Für beide Integrale benutzt man die gleiche Substitution:

$z = sin\,x$ und $\frac{dz}{dx} = cos\,x = \sqrt{1-sin^2 x} = \sqrt{1-z^2}$

a) $\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,dx = \int_0^{sin\,y} \frac{1}{\sqrt{(1-(kz)^2)(1-z^2)}}\,dz$

b) Mit dem Additionstheorem:

$$\begin{aligned} cos(a \pm b) &= cos(a)\,cos(b) \mp sin(a)\,sin(b) \\ \Rightarrow \quad cos(2x) &= cos^2 x - sin^2 x = 1 - 2sin^2 x \end{aligned}$$

$\int_0^y \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-2sin^2 x}}\,dx = \int_0^{sin\,y} \frac{1}{\sqrt{(1-2z^2)(1-z^2)}}\,dz$

Aufgabe 7.15 Versuchen Sie folgende uneigentliche Integrale der ersten Art zu berechnen $(a \in \mathbb{R})$:

a) $\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$ b) $\int_0^\infty e^{-x}dx$ c) $\int_0^\infty dx/(1+x)$

d) $\int_0^\infty \cos x\,dx$ e) $\int_0^\infty \cos x\, e^{-x}dx$

a) $\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{y\to\infty} \int_a^y x^{-2}dx = \lim\limits_{y\to\infty} [\frac{-1}{x}]_a^y = \lim\limits_{y\to\infty} (\frac{1}{a} - \frac{1}{y}) = \frac{1}{a}$

b) $\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim\limits_{y\to\infty} \int_0^y e^{-x}dx = \lim\limits_{y\to\infty} [-e^{-x}]_0^y = \lim\limits_{y\to\infty} (1-e^{-y}) = 1$

c) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} = \lim\limits_{y\to\infty} \int_0^y \frac{dx}{1+x} = \lim\limits_{y\to\infty} [ln\,|1+x|]_0^y = \lim\limits_{y\to\infty} [ln\,|1+y|]$

Der Grenzwert existiert nicht.

d) $\int_0^\infty \cos x\,dx = \lim\limits_{y\to\infty} \int_0^y cos\,x\,dx = \lim\limits_{y\to\infty} [sin\,x]_0^y = \lim\limits_{y\to\infty} sin\,y$

Auch dieser Grenzwert existiert nicht

e) $\int_0^\infty \cos x\, e^{-x}dx = \lim\limits_{y\to\infty} \int_0^y cos\,x\,e^{-x}\,dx = \lim\limits_{y\to\infty} [\frac{(sin\,y - cos\,y)e^{-y}+1}{2}] = \frac{1}{2}$

Aufgabe 7.16 Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{-2/\pi} \frac{\sin(1/x)}{x^2}\,dx$ und $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(1+x^4)}\,dx$.

a)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-2/\pi} \frac{\sin(1/x)}{x^2}\,dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-2/\pi} \frac{sin(\frac{1}{x})}{x^2} dx \\
&= -\lim_{a\to-\infty} \int_{1/a}^{-\pi/2} sin\, z\, dz \qquad \text{mit } z = \frac{1}{x} \text{ und } \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{-\pi/2}^{1/a} sin\, z\, dz \\
&= \lim_{a\to-\infty} [-cos\, z]_{-\pi/2}^{1/a} \\
&= -\lim_{a\to-\infty} cos\,\frac{1}{a} \\
&= 0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^4}\,dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{x}{1+x^4}\,dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \left[arctan\, x^2\right]_a^0 \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} arctan\, a^2 \\
&= -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.17 Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)}\,dx$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^4)}\,dx$.

a)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} [arctan\, x]_a^b \\
&= \lim_{b\to\infty} arctan\, b - \lim_{a\to-\infty} arctan\, a \\
&= \pi
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^4)}\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{x}{a+x^4}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}[\arctan x^2]_a^b \qquad \text{nach Aufg.7.9 l)} \\ &= 0\end{aligned}$$

AUFGABE 7.18 Versuchen Sie folgende uneigentlichen Integrale der zweiten Art zu berechnen ($0 < b \in \mathbb{R}$):

a) $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$ b) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)}}\,dx$ c) $\int_0^b \frac{1}{x^3}\,dx$

a) $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^b x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{a\to 0}[\frac{x^{1/2}}{1/2}]_a^b = 2\sqrt{b} - 2\lim_{a\to 0}\sqrt{a} = 2\sqrt{b}$

b)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx &= \lim_{a\to 0}\int_{1+a}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} \qquad \text{mit } y = x-1 \text{ und } \frac{dy}{dx} = 1 \\ &= 2 \qquad \text{nach Aufg.7.18 a}\end{aligned}$$

c) $\int_0^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{a\to 0}\int_a^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{a\to 0}[\frac{x^{-2}}{-2}]_a^b = \lim_{a\to 0}[\frac{1}{2a^2}] - \frac{1}{2b^2}$

Der Grenzwert existiert nicht.

AUFGABE 7.19 Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx$ und $\int_0^{\pi/2}\tan x\,dx$.

a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{a\to 0}\int_0^{1-a}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{a\to 0}[\arcsin x]_0^{1-a} \\ &= \lim_{a\to 0}\arcsin(1-a) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} tan\,x\,dx &= \lim_{a\to 0} \int_0^{\pi/2+a} \frac{sin\,x}{cos\,x}\,dx \\
&= -\lim_{a\to 0} \int_1^{cos(\frac{\pi}{2}-a)} \frac{dy}{y} \qquad \text{mit } y = cos\,x \text{ und } \frac{dy}{dx} = -sin\,x \\
&= -\lim_{a\to 0} \left[ln\,|x|\right]_1^{cos(\frac{\pi}{2}-a)} \\
&= -\lim_{a\to 0} ln \left|cos(\frac{\pi}{2}-a)\right|
\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert nicht.

Aufgabe 7.20 Berechnen Sie die Hauptwerte $\mathrm{P}\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\,dx$ und $\mathrm{P}\int_0^{\pi} \tan x\,dx$.

Cauchy-Hauptwerte: $\mathrm{P}\int_a^b dx\,f(x) := \lim_{\epsilon\to 0} \left[\int_a^{x_0-\varepsilon} dx\,f(x) + \int_{x_0+\varepsilon}^{b} dx\,f(x)\right]$

a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{a\to 0} \left[\int_{-1}^{-a} \frac{dx}{x} + \int_a^2 \frac{dx}{x}\right] \\
&= \lim_{a\to 0} \left(\left[ln\,|x|\right]_{-1}^{-a} + \left[ln\,|x|\right]_a^2\right) \\
&= \lim_{a\to 0} \left(ln\,|-a| - ln\,|a|\right) - ln\,|-1| + ln\,|2| \\
&= ln\,2
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\int_0^{\pi} \tan x\,dx &= \lim_{a\to 0} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-a} + \int_{\frac{\pi}{2}+a}^{\pi}\right] \frac{sin\,x}{cos\,x}\,dx \qquad \text{wie in Aufg.7.19 b)} \\
&= \lim_{a\to 0} \left(\left[ln\,|cos\,x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}-a} + \left[ln\,|cos\,x|\right]_{\frac{\pi}{2}+a}^{\pi}\right) \\
&= \lim_{a\to 0} \left(ln\left|cos(\frac{\pi}{2}+a)\right| - ln\left|cos(\frac{\pi}{2}-a)\right|\right) + ln\,|cos\,0| - ln\,|cos\,\pi| \\
&= \lim_{a\to 0} ln \left|\frac{cos(\frac{\pi}{2}+a)}{cos(\frac{\pi}{2}-a)}\right| + 0 \\
&= \lim_{a\to 0} ln \left|\frac{cos(\frac{\pi}{2})\,cos(a) - sin(\frac{\pi}{2})\,sin(a)}{cos(\frac{\pi}{2})\,cos(a) + sin(\frac{\pi}{2})\,sin(a)}\right| \\
&= \lim_{a\to 0} ln\,|-1| = 0
\end{aligned}$$

AUFGABE 7.21 Zeigen Sie, dass aus dem uneigentlichen Integral zweiter Art $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ durch die Substitution $x = 1/y^2$ ein uneigentliches Integral erster Art entsteht.
$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$ nach Aufgabe 7.18 a)

Mit $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, also $x = \frac{1}{y^2}$ und $\frac{dx}{dy} = -\frac{2}{y^3}$ folgt:

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = -\int_\infty^1 \frac{2y}{y^3}\, dy = 2\int_1^\infty \frac{dy}{y^2} = 2$ wie in Aufg.7.15 a)