Universität Heidelberg

MATHEMATISCHER VORKURS
ZUM STUDIUM DER PHYSIK

ÜBUNGEN

Aufgaben zu Kapitel 8

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

AUFGABE 8.1: Imaginäre Einheit

Berechnen Sie: i^{15}, i^{45}, $(-i)^{-20}$

- $i^{15} = (i^4)^3 \cdot i^3 = i^3 = -i$
- $i^{45} = (i^4)^{11} \cdot i = i$
- $(-i)^{-20} = \frac{1}{(-i)^{20}} = i^{20} = (i^4)^5 = 1$

AUFGABE 8.2: Argument einer komplexen Zahl:
Bestimme Sie das Argument der komplexen Zahl $b = 1 - i$.

Argument einer komplexen Zahl $z = x + i\,y = |z|\,e^{i\varphi}$:

$0 < \varphi = arg\,z := arctan\frac{y}{x} \leq 2\pi$

$arg\,b = arctan\frac{-1}{1} = arctan(-1) = \frac{7}{4}\pi$

AUFGABE 8.3: Komplexkonjugation:

$$c = 3 + 3\sqrt{3}\;i$$

$Re(c)$, $Im(c)$, $|c|$, $arg(c)$, c^*, $c + c^*$, $c - c^*$.

- $Re(c) = 3$
- $Im(c) = 3\sqrt{3}$
- $|c| = \sqrt{[Re(c)]^2 + [Im(c)]^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$
- $arg\,c = arctan\frac{3\sqrt{3}}{3} = arctan\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$
- $c^* = 3 - 3\sqrt{3}i$
- $c + c^* = 6$
- $c - c^* = 6 \cdot \sqrt{3}i$

Aufgabe 8.4: Multiplikation und Division einer komplexen Zahl
Berechnen Sie für die komplexe Zahl

$$c = 3 + 3\sqrt{3}\, i$$

cc^*, c^2, $\frac{c}{c^*}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{c^*}$, $\frac{1}{c} + \frac{1}{c^*}$, $\frac{1}{c} - \frac{1}{c^*}$ und c^3

- $cc^* = (3 + 3\sqrt{3}i) \cdot (3 - 3\sqrt{3}i) = 36$
- $c^2 = (3 + 3\sqrt{3}i)^2 = 9 + 18\sqrt{3}i - 27 = 18(-1 + i\sqrt{3})$
- $\frac{c}{c^*} = \frac{c^2}{cc^*} = \frac{18}{36}(-1 + i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot e^{i\,(-\frac{\pi}{3})} = exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)$
- $\frac{1}{c} = \frac{c^*}{cc^*} = \frac{3-3\sqrt{3}i}{36} = \frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12}i = \frac{1}{6}\, exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)$
- $\frac{1}{c^*} = \frac{c}{cc^*} = \frac{3+3\sqrt{3}i}{36} = \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12}i = \frac{1}{6}\, exp\left(\frac{\pi}{3} i\right)$
- $\frac{1}{c} + \frac{1}{c^*} = \frac{c+c^*}{cc^*} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- $\frac{1}{c} - \frac{1}{c^*} = \frac{c^*-c}{cc^*} = -\frac{6\sqrt{3}i}{36} = -\frac{\sqrt{3}}{6}i = -\frac{1}{2\sqrt{3}}i$
- $c^3 = (3 + 3\sqrt{3}i)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot (3\sqrt{3}i) + 3 \cdot 3 \cdot (3\sqrt{3}i)^2 + (3\sqrt{3}i)^3 = -216$

Berechnen Sie für eine komplexe Zahl

$$z = r\, e^{i\phi} = r\,(cos\,\phi + i\, sin\,\phi)$$

zz^*, z^2, $\frac{z}{z^*}$, $\left|\frac{z}{z^*}\right|$, $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^*}$, $\frac{1}{z} - \frac{1}{z^*}$

- $zz^* = \left(r\, e^{i\phi}\right) \cdot \left(r\, e^{-i\phi}\right) = r^2 \in \mathbb{R}$
- $z^2 = r^2 e^{2i\phi}$
- $\frac{z}{z^*} = \frac{z^2}{zz^*} = e^{2i\phi}$
- $\left|\frac{z}{z^*}\right| = \left|e^{2i\phi}\right| = 1$
- $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^*} = \frac{z+z^*}{zz^*} = 2\frac{Re\,z}{r^2} = \frac{2}{r}\, cos(\phi) \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{z} - \frac{1}{z^*} = -2i\frac{Im\,z}{r^2} = -\frac{2i}{r}\, sin(\phi)$

Aufgabe 8.5: einfache Abbildungen
Wählen Sie eine komplexe Zahl z und berechnen und skizzieren Sie für diese:

a) iz

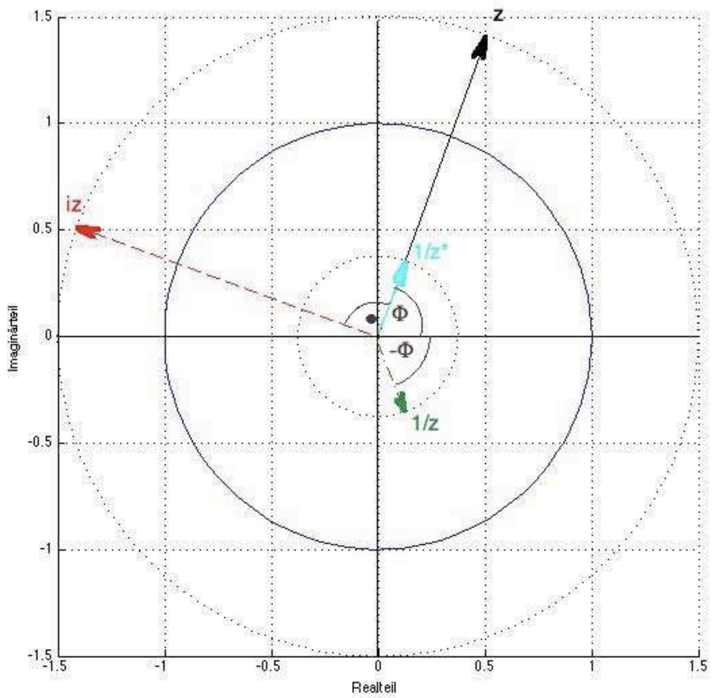
b) $\frac{1}{z}$

c) $\frac{1}{z^*}$

a) $iz = e^{i\pi/2} z = r\, e^{i(\phi+\pi/2)}$

b) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\phi}$

c) $\frac{1}{z^*} = \frac{1}{r} e^{i\phi}$



Aufgabe 8.8: Beweisen Sie das Additionstheorm

$$cos(z-w) = cos(z)cos(w) \; + \; sin(z)sin(w)$$

mit Hilfe der Exponentialfunktionen. Zeigen Sie weiterhin

$$cos^2(z) + sin^2(z) \; = \; 1.$$

$$\begin{aligned}
cos(z-w) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(z-w)} + e^{-i(z-w)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz}e^{-iw} + e^{-iz}e^{iw}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[(cos\, z + i\, sin\, z)\,(cos\, w - i\, sin\, w)\right] + \left[(cos\, z - i\, sin\, z)\,(cos\, w + i\, sin\, w)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{[cos\, z\, cos\, w + i\,(sin\, z\, cos\, w - cos\, z\, sin\, w) + sin\, z\, sin\, w] \\
&\quad + [cos\, z\, cos\, w - i\,(sin\, z\, cos\, w - cos\, z\, sin\, w) + sin\, z\, sin\, w]\} \\
&= cos\, z\, cos\, w + sin\, z\, sin\, w
\end{aligned}$$

Mit $z = w$ gilt also: $1 = cos\, 0 = cos^2 z + sin^2 z$

Aufgabe 8.9: Zusammenhang mit den hyperbolischen Funktionen
Zeigen Sie, daß:

a) $cos(iz) \; = \; cosh(z)$

b) $sin(iz) \; = \; i\, sinh(z)$

c) $4sin^3(\alpha) \; = \; 3sin(\alpha) - \; sin(3\alpha)$

a) $cos(iz) = \frac{1}{2}\left(e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-z} + e^{z}\right) = cosh(z)$

b) $sin(iz) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-z} - e^{z}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) = sinh(z)$

c)

$$\begin{aligned}
4\, sin^3(\alpha) &= 4\left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}\right)^3 \\
&= -\frac{1}{2i}\left(e^{3i\alpha} - 3e^{2i\alpha}e^{-i\alpha} + 3e^{i\alpha}e^{-2i\alpha} - e^{-3i\alpha}\right) \\
&= \left[-\frac{e^{i(3\alpha)} - e^{-i(3\alpha)}}{2i} + 3\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}\right] \\
&= -sin(3\alpha) + 3\, sin(\alpha)
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.13: Wurzeln

Berechnen und skizzieren Sie folgende Wurzeln:

a) $w = \sqrt[3]{i}$

b) $w = \sqrt[4]{-1}$

c) $w = \sqrt[8]{1}$

d) $w = \sqrt[2]{8i}$

a) $w = \sqrt[3]{i} = e^{i\frac{(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}{3}}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und man bedenke, dass $0 < \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\pi$

$w_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $w_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$, $w_3 = -i$

b) $w = \sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{(\pi+2\pi k)}{4}}$

$w_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $w_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $w_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $w_4 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

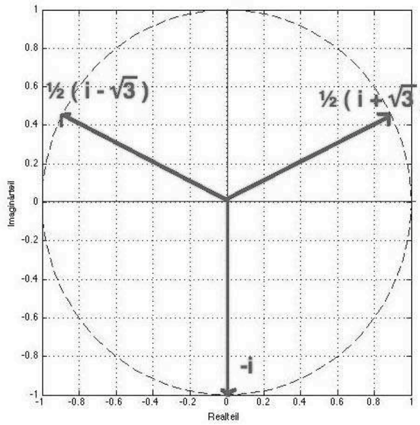
c) $w = \sqrt[8]{1} = e^{i\frac{2\pi k}{8}}$

$w_1 = 1$, $w_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $w_3 = i$, $w_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $w_5 = -1$, $w_6 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $w_7 = -i$, $w_8 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

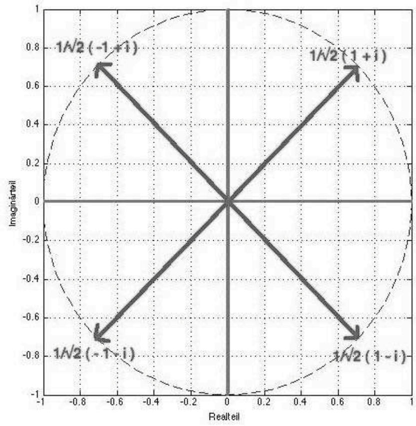
d) $w = \sqrt[2]{8i} = \sqrt{8}\, e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}}$

$w_1 = 2(1+i)$, $w_2 = -2(1+i)$

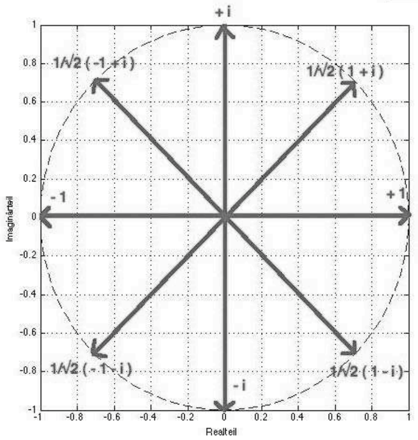
8.13 a)



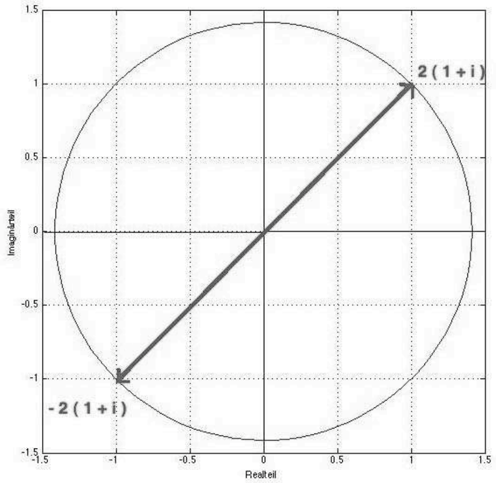
8.13 b)



8.13 c)



8.13 d)



AUFGABE 8.14: Logarithmus:

Berechnen Sie $ln(i)$

$ln(i) = ln\left(e^{i\pi(\frac{1}{2}+2k)}\right) = i\pi(\frac{1}{2}+2k) \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}$