Universität Heidelberg

Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik

Übungen

Aufgaben zu Kapitel 9

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

Aufgabe 9.1: Abstand zwischen Punkten:
Berechnen Sie den Abstand der Punkte $P = \{2, 2, 4\}$ und $Q = \{1, -2, 0\}$ voneinander sowie deren Abstand vom Nullpunkt.

- Abstand zwischen den beiden Vektoren
$|\vec{p} - \vec{q}| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2} = \sqrt{1 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{33}$
- Abstand des Punktes P vom Nullpunkt $\left|\vec{p} - \vec{0}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24}$
- Abstand des Punktes Q zum Nullpunkt $\left|\vec{q} - \vec{0}\right| = \sqrt{1 + (-2)^2 + 0} = \sqrt{5}$

Aufgabe 9.2: Punktkoordinaten:
Wie lauten die Koordinaten des Punktes $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ in einem Koordinatensytem, dessen Ursprung im Punkt $0' = \{1, 2, -3\}$ liegt ?

Neuer Punkt $P' = \{p_1 - 1,\ p_2 - 2,\ p_3 + 3\}$

Aufgabe 9.3: Gedrehtes Koordinatensystem:

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P in einem Koordinatensystem S', das gegenüber S um die Winkel $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ oder $\varphi = \frac{\pi}{6}$ um die 3-Richtung gedreht wurde.

b) Wie lauten die Komponenten $a_k^{'}$, $k = 1, 2, 3$ eines Vektors $\underline{a}$ in einem Koordinatensystem S', das gegenüber dem Koordinatensystem S um den Winkel φ um die 3-Achse gedreht wurde. Was ergibt sich für die speziellen Winkel $\varphi = \pi$ und $\varphi = \pi/2$?

c) Wie lauten die Komponenten der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in einem Koordinatensystem, das gegenüber dem ursprünglichen System S um π bzw. $\pi/2$ um die 3-Achse gedreht ist ?

a) Drehung um φ um die 3-Achse: $\vec{p}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

(i) $\varphi = \pi$: $\vec{p}' = \begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

(ii) $\varphi = \frac{\pi}{4}$: $\vec{p}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-p_1 + p_2) \\ p_3 \end{pmatrix}$

(iii) $\varphi = \frac{\pi}{6}$: $\vec{p}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sqrt{3}p_1 + p_2) \\ \frac{1}{2}(-p_1 + \sqrt{3}p_2) \\ p_3 \end{pmatrix}$

b) Drehung um φ um die 3-Achse: $\vec{a}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

(i) $\varphi = \pi$: $\vec{a}' = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

(ii) $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$

c) Drehung um φ um die 3-Achse:

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{b}' &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \vec{c}' &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(i) $\varphi = \pi : \vec{a}' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c}' = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\varphi = \frac{\pi}{2} : \vec{a}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

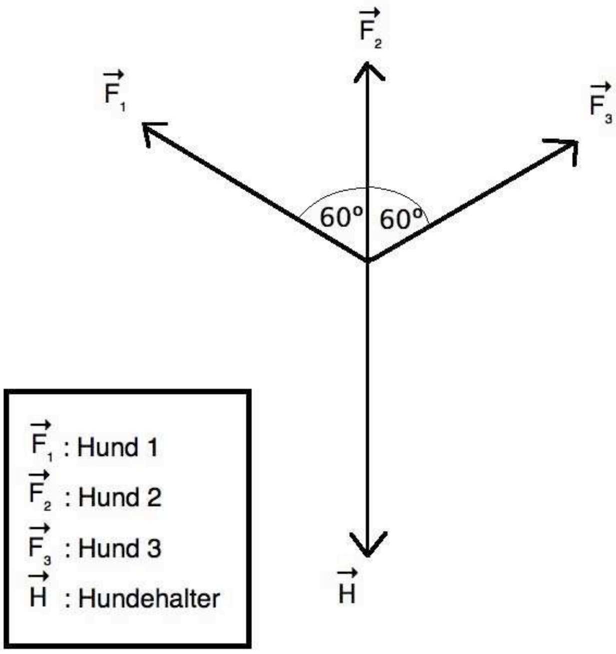
AUFGABE 9.4: Länge von Vektoren:
Berechnen Sie die Länge folgender Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$
- $b = \left|\vec{b}\right| = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18}$

AUFGABE 9.5: Zum Kräfteparallelogramm:

Drei Polarhunde ziehen an einem Schlitten mit gleicher Stärke, aber unter relativen Winkeln von 60°. Welche Kraft muß der Hundehalter in welche Richtung ausüben, wenn er will, daß der Schlitten noch nicht losfährt.



- Die Kraft der 3 Hunde ist gleich: $F = \left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_3\right|$

- Lege die Richtung eines Hundes fest (hier die des Mittleren): $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \vec{F}_1 &= \begin{pmatrix} cos\,(-60^o) & sin\,(-60^o) \\ -sin\,(-60^o) & cos\,(-60^o) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{F}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \\
\text{und}\quad \vec{F}_3 &= \begin{pmatrix} cos\,60^o & sin\,60^o \\ -sin\,60^o & cos\,60^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{F}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Nach der Gleichgewichtsbedingung (siehe Aufg. 9.6) muss der Hundehalter die Kraft

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= -\left[\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\right] \\
&= -\left[\begin{pmatrix} \frac{F}{2} \\ \frac{F}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F}{2} \\ -\frac{F}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} -2F \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

aufwenden, damit der Schlitten noch nicht losfährt. Die Richtung ist entgegengesetzt zu Hund 2 $\left(\vec{F}_2\right)$

Aufgabe 9.6: Gegeben sind die drei Kräftevektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(in N-Einheiten). Bestimmen Sie aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{G} = 0$$

die Gleichgewichtskraft $\vec{G}$, die die Wirkung der drei Kräfte $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufhebt.

$$\vec{G} = -\left[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right] = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = -\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.7: Differenzen von Vektoren:
Bilden Sie (graphisch und rechnerisch) die Summe und die beiden möglichen Differenzen folgender Vektoren:

a)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

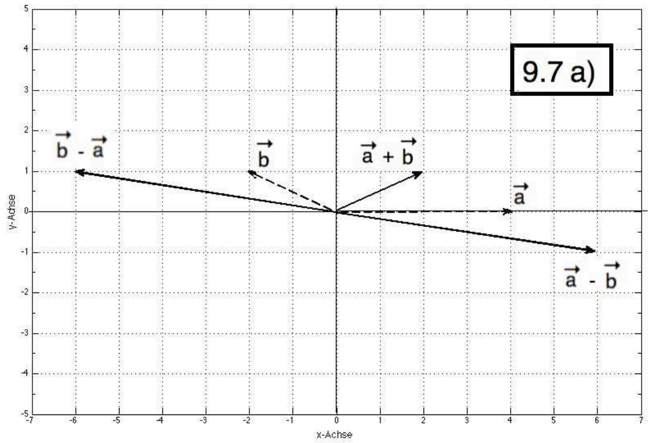
b)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

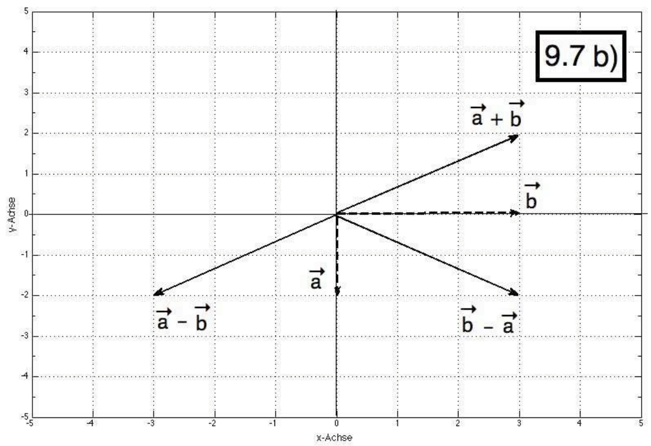
c)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

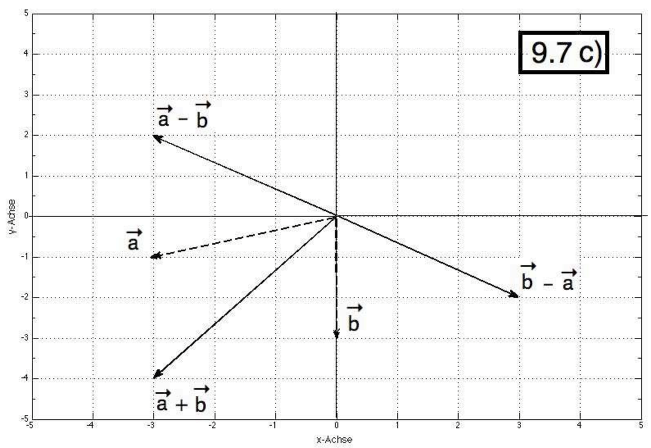
a) $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}-\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}-\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}-\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$


9.7 a)
$\vec{b} - \vec{a}$
$\vec{b}$
$\vec{a} + \vec{b}$
$\vec{a}$
$\vec{a} - \vec{b}$
y-Achse
x-Achse


9.7 b)
$\vec{a} + \vec{b}$
$\vec{b}$
$\vec{a}$
$\vec{a} - \vec{b}$
$\vec{b} - \vec{a}$
y-Achse
x-Achse


9.7 c)
$\vec{a} - \vec{b}$
$\vec{a}$
$\vec{b} - \vec{a}$
$\vec{b}$
$\vec{a} + \vec{b}$
y-Achse
x-Achse

Aufgabe 9.8: Basisvektoren

Bilden die folgenden drei Vektoren eine Basis des R^3 ? Wenn ja, normieren Sie die Vektoren auf die Länge eins.

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Basis im $\mathbb{R}^n$ wird von n linear unabhängigen Vektoren $\vec{v}_j$ aufgespannt

d.h. $\vec{v}_j \neq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} c_i \cdot \vec{v}_i$

a) nein, denn $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$

b) ja, denn man kann keine lineare Abhängigkeit finden zwischen den 3 Vektoren

$$\begin{aligned}
\vec{e}_a &= \tfrac{\vec{a}}{a} &= \frac{1}{\sqrt{1+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{e}_b &= \tfrac{\vec{b}}{b} &= \frac{1}{\sqrt{1+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{e}_c &= \tfrac{\vec{c}}{c} &= \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.9: Einheitsvektoren

Bestimmen Sie den Einheitsvektor in Richtung des Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

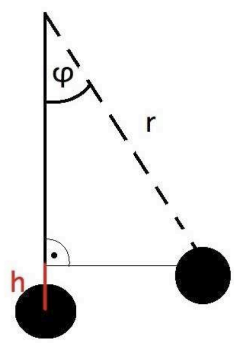
Aufgabe 9.10: Arbeit

Wie berechnet man die Arbeit, die geleistet werden muß,

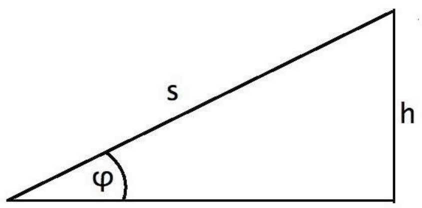
a) wenn die Masse m eines mathematischen Pendels der Fadenlänge r um den Winkel φ augelenkt werden soll.

b) wenn ein Massenpunkt m um den Winkel φ gegen die Horizontale geneigte Ebene um eine Strecke s hinaufgeschoben werden soll.

9.10 a)



9.10 b)



a) $W = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot r\,(1 - cos(\varphi))$

b) $W = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot s\, sin(\varphi)$