Universität Heidelberg

Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik

Übungen

Aufgaben zu Kapitel 9 (Fortsetzung)

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

Aufgabe 9.11: Winkel im Skalarprodukt

Was bedeutet

$$2(\underline{a} \cdot \underline{b}) = |\underline{a}||\underline{b}|$$

für den Winkel zwischen den beiden Vektoren ?

Es gilt mit $\sphericalangle(a, b) = \varphi$:

$$2\,(\underline{a} \cdot \underline{b}) = 2 \cdot |\underline{a}||\underline{b}| \cdot \cos(\varphi) = |\underline{a}||\underline{b}| \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\varphi) = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \pi/3$$

Aufgabe 9.12: Cosinussatz

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes den Cosinus-Satz der ebenen Geometrie, nach dem in einem Dreieck mit den Seitenlängen a,b und c gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos(\gamma)$$

wobei γ den Gegenwinkel der Seite c bezeichnet.

In einem Dreieck mit den Seitenlngen a, b und c gilt in Vektorschreibweise: $\underline{c} = \underline{a} - \underline{b}$
Quadrieren wir diese Gleichung, so folgt:

$$\begin{aligned} \underline{c}^2 = c^2 &= (\underline{a} - \underline{b})^2 = \underline{a}^2 + \underline{b}^2 - 2\,(\underline{a} \cdot \underline{b}) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\sphericalangle(a, b) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned}$$

b) Was folgt daraus für $\gamma = \pi/2$?

Für $\gamma = \pi/2$ heißt das:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi/2) = a^2 + b^2$

Wir erhalten also den Satz des Pythagoras.

Aufgabe 9.13: Schwarzsche Ungleichung

Warum gilt für den Betrag des Skalarproduktes die sogenannte Schwarzsche Ungleichung

$$|(\underline{a} \cdot \underline{b})| \leq |\underline{a}||\underline{b}|$$

$|(\underline{a} \cdot \underline{b})| \; = \; |\underline{a}||\underline{b}||\cos\sphericalangle(a,b)| \; \leq \; |\underline{a}||\underline{b}|, \qquad \text{weil } |\cos\sphericalangle(a,b)| \; \leq \; 1 \; .$

Aufgabe 9.14: Zum Assoziativgesetz

a) Vergleichen Sie den Vektor $(\underline{a} \cdot \underline{b})\,\underline{c}$ mit dem Vektor $\underline{a}\,(\underline{b} \cdot \underline{c})$ geometrisch.

Der Vektor $(\underline{a} \cdot \underline{b})\,\underline{c}$ hat den Betrag $abc\cos\sphericalangle(a,b)$ und zeigt in Richtung von $\underline{c}$, der Vektor $\underline{a}\,(\underline{b} \cdot \underline{c})$ hat den Betrag $abc\cos\sphericalangle(b,c)$ und zeigt in die Richtung von $\underline{a}$.

b) Was bedeutet $\underline{a}^3$?

$\underline{a}^3 = a^2 \cdot \underline{a} = a^3 \cdot \hat{e}_a$ ($\hat{e}_a$ ist der Einheitsvektor in Richtung von $\underline{a}$)

Damit ist $\underline{a}^3$ ein Vektor mit Betrag a^3 und in Richtung von $\underline{a}$.

Aufgabe 9.15: Zum Distributivgesetz

Zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ spannen ein Parallelogramm auf.

a) Berechnen Sie dazu $(\,(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} - \underline{b}))$.

$(\,(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} - \underline{b})) = \underline{a}^2 - \underline{b}^2 = a^2 - b^2$

b) Was bedeutet das Ergebnis geometrisch ?

Die beiden Vektoren $(\underline{a} + \underline{b})$ und $(\underline{a} - \underline{b})$ bilden die Diagonalen des aufgespannten Parallelogramms. Das Ergebnis ist also das Skalarprodukt der beiden Diagonalen.

c) Bestimmen Sie den Winkel φ zwischen den beiden Diagonalen des Parallelogramms.

Es gilt:

$$\begin{aligned} (\,(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{a}-\underline{b})) &= |\underline{a}+\underline{b}|\cdot|\underline{a}-\underline{b}|\cdot\cos(\varphi) = a^2-b^2 \\ \Leftrightarrow \qquad \varphi &= \arccos\left(\frac{a^2-b^2}{|\underline{a}+\underline{b}|\cdot|\underline{a}-\underline{b}|}\right) \end{aligned}$$

d) Wann stehen diese senkrecht aufeinander ?

Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt: $\cos(\varphi) = 0$. Das ist erfüllt, wenn $a = b$, also die Beträge der Vektoren übereinstimmen. Damit haben wir einen Rhombus.

Aufgabe 9.16: Winkelbestimmung

a) Bestimmen Sie den Winkel zwischen zwei Kanten eines Tetraeders.

Man denke sich das Tetraeder in einen Würfel einbeschrieben. Seine Ecken sind damit zugleich Würfelecken und seine sechs Kanten Diagonalen der Würfelflächen. Drei seiner Kanten werden beschrieben durch $(\hat{e}_1+\hat{e}_2)$, $(\hat{e}_1+\hat{e}_3)$ und $(\hat{e}_2+\hat{e}_3)$.
Damit ergibt sich der Winkel zwischen zwei der Kanten zum Beispiel als:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{(\hat{e}_1+\hat{e}_2)\cdot(\hat{e}_1+\hat{e}_3)}{|\hat{e}_1+\hat{e}_2|\cdot|\hat{e}_1+\hat{e}_3|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right) = \arccos(1/2) = 60°$$

b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen zwei benachbarten Diagonalen eines Würfels.

Einfach wird es, wenn wir einen Würfel der Kantenlänge zwei wählen mit Mittelpunkt im Ursprung. Damit werden zwei benachbarte Diagonalen durch $(\hat{e}_1+\hat{e}_2+\hat{e}_3)$ und $(\hat{e}_1+\hat{e}_2-\hat{e}_3)$ dargestellt.
Es ergibt sich der Winkel zwischen den Diagonalen also zu:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{(\hat{e}_1+\hat{e}_2+\hat{e}_3)\cdot(\hat{e}_1+\hat{e}_2-\hat{e}_3)}{|\hat{e}_1+\hat{e}_2+\hat{e}_3|\cdot|\hat{e}_1+\hat{e}_2-\hat{e}_3|}\right) = \arccos(1/3) \approx 70,53°$$

Aufgabe 9.17: Orthonormalbasis
Bilden die drei Vektoren

$$\underline{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \underline{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \underline{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$?

Wir müssen zeigen: $\underline{a}_k \cdot \underline{a}_l = \delta_{kl}$

$$\begin{aligned}
\underline{a}_1^2 &= \frac{1}{2}\cdot(1^2+1^2+0^2) = 1\\
\underline{a}_2^2 &= \frac{1}{6}\cdot(1^2+(-1)^2+2^2) = 1\\
\underline{a}_3^2 &= \frac{1}{3}\cdot(1^2+(-1)^2+(-1)^2) = 1\\
\underline{a}_1\cdot\underline{a}_2 &= \frac{1}{\sqrt{12}}\cdot(1-1) = 0\\
\underline{a}_1\cdot\underline{a}_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(1-1) = 0\\
\underline{a}_2\cdot\underline{a}_3 &= \frac{1}{\sqrt{18}}\cdot(1+1-2) = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.18: Skalarprodukt
Bestimmen Sie das Skalarprodukt und die Länge der Projektionen für die beiden Vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}$$

von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$ bzw. von $\underline{b}$ auf $\underline{a}$

$$\begin{aligned}
\underline{a}\cdot\underline{b} &= 4\cdot(-2)+(-2)\cdot 3+4\cdot 6 = -8-6+24 = 10 = ab\cos(\varphi)\\
\tilde{a} &= a\cdot\cos(\varphi) = \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{b} = \frac{10}{\sqrt{(-2)^2+3^2+6^2}} = \frac{10}{7}\\
\tilde{b} &= b\cdot\cos(\varphi) = \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{a} = \frac{10}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Wobei $\tilde{a}$ die Projektion von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$ und $\tilde{b}$ die Projektion von $\underline{b}$ auf $\underline{a}$ ist und φ der Winkel zwischen $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

AUFGABE 9.19: Winkel mit den Koordinatenachsen:
Welche Winkel bildet der Vektor $\underline{a} = \hat{e}_1 + \sqrt{3}\hat{e}_2$ mit den Koordinatenachsen ?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\begin{aligned} \underline{a} \cdot \hat{e}_1 = a\cos(\varphi_1) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi_1 = \arccos(1/2) = 60^\circ \\ \underline{a} \cdot \hat{e}_2 = a\cos(\varphi_2) = \sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi_2 = \arccos(\sqrt{3}/2) = 30^\circ \\ \underline{a} \cdot \hat{e}_3 = a\cos(\varphi_3) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi_3 = \arccos(0) = 90^\circ \end{aligned}$$

AUFGABE 9.20: Transversaler Anteil:
Berechnen Sie den zum Vektor

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

transversalen Anteil von

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechne zunächst den Einheitsvektor in Richtung b:

$$\hat{e}_b = \left(\frac{\underline{b}}{b}\right) = \left(\frac{\underline{b}}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Nun die Projektion von $\underline{a}$ auf $\hat{e}_b$:

$$(\underline{a} \cdot \hat{e}_b) = 1 + 4 - 2 = 3$$

Der transversale Anteil ist der Teil des Vektors $\underline{a}$ ohne $(\underline{a} \cdot \hat{e}_b)$ in Richtung von $\underline{b}$:

$$\underline{a}_{\perp e_b} = \underline{a} - (\underline{a} \cdot \hat{e}_b)\hat{e}_b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

AUFGABE 9.21: Berechnen Sie die Arbeit, die die Kraft

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(in N-Einheiten) auf der Wegstrecke

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(in m-Einheiten) verrichtet. Bestimmen Sie auch den Winkel zwischen $\vec{F}$ und $\vec{s}$

Wir wissen Arbeit ist Kraft mal Weg: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$$W = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \; Nm = (-4 + 3 + 7) \; Nm = 6 \, Nm$$

Auch den Winkel berechnen wir über das Skalarprodukt:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \arccos(\frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{F s}) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \arccos(\frac{6}{\sqrt{15 \cdot 55}}) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \approx 81.66°$$

AUFGABE 9.22: Inverse Funktionenschar:

Geben Sie explizit eine Funktionenschar $\underline{x}$ an, welche die Gleichung$(\underline{a} \cdot \underline{x}) = 1$ löst, wenn

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir suchen zunächst einen Vektor, der die Gleichung löst. Dazu:

$$a = 3 \qquad \hat{e}_a = (\underline{a}/a) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Eine Lösung ist damit: $\quad \underline{x} = \hat{e}_a / a = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$

Finden wir nun zu $\underline{\mathrm{a}}$ senkrechte Vektoren, so können wir diese zu unserer Lösung addieren, ohne dass das Ergebnis beeinflusst wird.

$$
\begin{aligned}
\hat{e}_{\perp a} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \text{ mit } (\underline{\mathrm{a}} \cdot \hat{e}_{\perp a}) &= 1 \cdot 2/3 - 2 \cdot 2/3 + 2 \cdot 1/3 = 0 \text{ und} \\
\hat{e}_{\perp a, \hat{e}_{\perp a}} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \text{ mit } (\underline{\mathrm{a}} \cdot \hat{e}_{\perp a, \hat{e}_{\perp a}}) &= 1 \cdot 2/3 + 2 \cdot 1/3 - 2 \cdot 2/3 = 0 \\
\text{und mit } (\hat{e}_{\perp a} \cdot \hat{e}_{\perp a, \hat{e}_{\perp a}}) &= 2 \cdot 2/9 - 2 \cdot 1/9 - 1 \cdot 2/9 = 0
\end{aligned}
$$

sind zwei linear unabhängige Lösungen, mit denen wir unsere Funktionenschar schreiben können als:

$\underline{\mathrm{x}} = \hat{e}_a/a + \lambda_1 \hat{e}_{\perp a} + \lambda_2 \hat{e}_{\perp a, \hat{e}_{\perp a}}$

mit den Koeffizienten λ_1 und λ_2 aus $\mathbb{R}$.

Aufgabe 9.23: Vektorprodukte in der Physik

Wie erhalten Sie

a) bei einer Drehbewegung die lineare Geschwindigkeit $\vec{v}$ aus der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und dem Ort $\vec{x}$?

   $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{x}]$

   Auch die Corioliskraft, die jeden auf der Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegten Massenpunkt m auf der Nordhalbkugel "nach rechts" ablenkt ist ein Vektorprodukt: $\vec{F}_C = 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}]$

b) bei der Kepler-Bewegung die Flächengeschwindigkeit $\vec{f}$ aus dem Ort $\vec{x}$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Planeten ?

   $\vec{f} = \frac{1}{2}[\vec{x} \times \vec{v}]$

c) den Bahndrehimpuls $\vec{L}$ aus dem Ortsvektor $\vec{x}$ und Impuls $\vec{p}$?

   $\vec{L} = [\vec{x} \times \vec{p}]$

d) das mechanische Drehmoment $\vec{D}$ aus Kraft $\vec{F}$ und Hebelarm $\vec{x}$?

   $\vec{D} = [\vec{x} \times \vec{F}]$

e) das Drehmoment auf einen elektrischen Dipol mit Dipolmoment $\vec{p}$ in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E}$?

$\vec{D} = [\vec{p} \times \vec{E}]$

f) das Drehmoment auf einen magnetischen Dipol mit Dipolmoment $\vec{m}$ in einem homogenen Magnetfeld $\vec{H}$?

$\vec{D} = [\vec{m} \times \vec{H}]$

g) die Dichte der elektromagnetischen Lorentz-Kraft $\vec{k}$ aus der Geschwindigkeit $\vec{v}$ eines Elektrons mit der Masse m und Ladung e und der magnetischen Induktion $\vec{B}$?

$\vec{k} = \frac{e}{m}[\vec{v} \times \vec{B}]$

h) den Poynting-Vektor $\vec{S}$ des elektromagnetischen Strahlungsflusses aus dem elektrischen $\vec{E}$ und magnetischen Fled $\vec{H}$ der Strahlung ?

$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]$

i) das Magnetfeld $\vec{H}$ im Abstand $\vec{x}$ von einem elektrischen Stromfaden $\vec{j}$ nach dem Biot-Savartschen Gesetz ?

$\vec{H} = \frac{1}{c}\int dV \frac{\vec{j}\times\vec{x}}{x^3}$

(Im Gaußschen Einheitensystem , c ist die Lichtgeschwindigkeit.)

Aufgabe 9.24: Drehmomente

Bestimmen Sie das Drehmoment $\vec{M}$ der Kraft

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(in N-Einheiten) für den Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(in cm-Einheiten). Berechen Sie auch den Betrag M von $\vec{M}$.

Es gilt $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Wir berechnen also:

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 - 0 \\ 0 + 0.2 \\ 0 - 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0.2 \\ -0.6 \end{pmatrix} \text{(in Einheiten Nm)}$$

Für den Betrag M erhalten wir: $M = \sqrt{0.09 + 0.04 + 0.36}\ Nm = \sqrt{0.49}\ Nm = 0.7\,Nm$

Anmerkung: $\underline{\mathrm{a}} \times \underline{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_3 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9.25: Drehmomente
Diskutieren Sie den Betrag und die Richtung des Drehmoments auf eine Kompaßnadel im magnetischen Erdfeld, wenn der Winkel θ zwischen Dipolmoment $\vec{m}$ und Feld $\vec{H}$ 0, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π bzw. $5\pi/4$ beträgt.

$$\begin{aligned}
& \vec{D} = [\vec{m} \times \vec{H}]\,; \quad D = mH\sin(\theta) \\
\theta &= 0: \quad D = mH\sin(0) = 0 \qquad (\vec{m} \parallel \vec{H}\,,\ \text{D minimal}) \\
\theta &= \pi/4: \quad D = mH/\sqrt{2} \qquad (\text{spitzer Winkel, will } \theta \text{ verkleinern}) \\
\theta &= \pi/2: \quad D = mH \qquad (\vec{m} \perp \vec{H}\,,\ \text{D maximal, will } \theta \text{ verkleinern}) \\
\theta &= 3\pi/4: \quad D = mH/\sqrt{2} \qquad (\text{stumpfer Winkel, will } \theta \text{ verkleinern}) \\
\theta &= \pi: \quad D = mH\sin(\pi) = 0 \qquad (\vec{m} \downarrow\uparrow \vec{H}\,;\ \text{D minimal}) \\
\theta &= 5\pi/4: \quad D = mH/\sqrt{2} \qquad (\text{überstumpfter Winkel, will } \theta \text{ vergrößern})
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.26: Distributivgesetze der Vektorprodukte

a) Berechnen Sie $[(\underline{\mathrm{a}} + \underline{\mathrm{b}}) \times (\underline{\mathrm{a}} - \underline{\mathrm{b}})]$.

$[(\underline{\mathrm{a}} + \underline{\mathrm{b}}) \times (\underline{\mathrm{a}} - \underline{\mathrm{b}})] = [\underline{\mathrm{a}} \times \underline{\mathrm{a}}] - [\underline{\mathrm{a}} \times \underline{\mathrm{b}}] + [\underline{\mathrm{b}} \times \underline{\mathrm{a}}] - [\underline{\mathrm{b}} \times \underline{\mathrm{b}}] = -2[\underline{\mathrm{a}} \times \underline{\mathrm{b}}]$

b) Was ergibt sich für

$$[\underline{\mathrm{a}} \times \underline{\mathrm{b}}]^2 + (\underline{\mathrm{a}} \cdot \underline{\mathrm{b}})^2$$

(Lagrange-Identität)

$[\underline{\mathrm{a}} \times \underline{\mathrm{b}}]^2 + (\underline{\mathrm{a}} \cdot \underline{\mathrm{b}})^2 = a^2b^2 \cdot \sin^2(\sphericalangle(\underline{\mathrm{a}}, \underline{\mathrm{b}})) + a^2b^2 \cdot \cos^2(\sphericalangle(\underline{\mathrm{a}}, \underline{\mathrm{b}})) = a^2b^2$

Aufgabe 9.27: Dritter Basisvektor:
Welche der Einheitsvektoren stehen senkrecht auf:

a) $(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$ und $(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)$

$[(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \times (\hat{e}_1 - \hat{e}_2)] = -[\hat{e}_1 \times \hat{e}_2] + [\hat{e}_2 \times \hat{e}_1] = -2[\hat{e}_1 \times \hat{e}_2] = -2\hat{e}_3\,,$

also normiert $\hat{e}_3$

b) $(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)$ und $(\hat{e}_2 - \hat{e}_3)$

$[(\hat{e}_1 - \hat{e}_2) \times (\hat{e}_2 - \hat{e}_3)] = [\hat{e}_1 \times \hat{e}_2] - \vec{0} - [\hat{e}_1 \times \hat{e}_3] + [\hat{e}_2 \times \hat{e}_3] = \hat{e}_3 + \hat{e}_2 + \hat{e}_1\,,$

also normiert $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3)$ und $(\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3)$

$[(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3) \times (\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3)] = [\hat{e}_1 \times \hat{e}_2] - 2[\hat{e}_1 \times \hat{e}_3] + 2[\hat{e}_3 \times \hat{e}_2] - \vec{0} = \hat{e}_3 + 2\hat{e}_2 - 2\hat{e}_1\,,$

also normiert $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$