Klassische Elektrodynamik

Theoretische Physik II Vorlesungs-Skriptum

Deutsche Fassung

Franz Wegner
Institut für Theoretische Physik
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
2003

Hinweise auf Druckfehler nehme ich gerne entgegen.
Jörg Raufeisen, Andreas Haier, Stephan Frank und Bastian Engeser bin ich dankbar, dass sie mich auf mehrere Druckfehler in der ersten deutschen Auflage aufmerksam gemacht haben. In gleicher Weise danke ich Björn Feuerbacher, Sebastian Diehl, Karsten Freese, Markus Gabrysch und Jan Tomczak, dass sie mich auf Druckfehler der zweiten Auflage hingewiesen haben.
Cornelia Merkel, Melanie Steiert und Sonja Bartsch danke ich für das sorgfältige Lesen und Korrigieren des Textes der zweisprachigen Ausgabe.

Bücher:

BECKER, SAUTER: Theorie der Elektrizität I
JACKSON, Classical Electrodynamics
LANDAU, LIFSCHITZ: Lehrbuch der Theoretischen Physik II: Klassische Feldtheorie
PANOFSKY, PHILLIPS, Classical Electricity and Magnetism
SOMMERFELD: Vorlesungen über Theoretische Physik III: Elektrodynamik
STRATTON, Electromagnetic Theory
STUMPF, SCHULER: Elektrodynamik

A Grundgleichungen

Vorbemerkungen
Ich gehe davon aus, dass der Student bereits etwas mit der klassischen Elektrodynamik aus einer einführenden Vorlesung vertraut ist. Daher setze ich die vollständigen Gleichungen an den Anfang und führe von diesen ausgehend die jeweiligen Spezialisierungen ein.
In dieser Ausarbeitung verwende ich das Gaussssche Maßsystem und nicht das SI-System. Der Zusammenhang und die Motivation wird im nächsten Abschnitt und in Anhang A angegeben.
Im Anhang B sind Formeln zur Vektoralgebra und Vektoranalysis angegeben. Der Leser /Die Leserin sei jedoch gewarnt, dass er/sie an einigen Stellen (B.11, B.15, B.34-B.50 und Aufgabe nach B.71) die Ergebnisse selbst einzutragen hat. Er/Sie ist also aufgefordert, die Rechnungen selbst durchzuführen oder zumindest die Ergebnisse, die in dem Skriptum erarbeitet werden, dort einzutragen.

1 Grundgleichungen der Elektrodynamik

Die Elektrodynamik befasst sich mit elektrischen und magnetischen Feldern, ihrer Erzeugung durch Ladungen und Ströme, ihrer Ausbreitung (elektromagnetische Wellen), ihrer Rückwirkung auf die Materie (Kräfte).

1.a Ladungen und Ströme

1.a.α Ladungsdichte

Die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ ist die Ladung Δq pro Volumenelement ΔV

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}. \tag{1.1}$$

Damit ergibt sich die Ladung q im Volumen V zu

$$q = \int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\mathbf{r}). \tag{1.2}$$

Besteht die Ladungsverteilung aus Punktladungen q_i an den Orten $\mathbf{r}_i$, so ist die Ladungsdichte durch die Summe

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}), \tag{1.3}$$

gegeben, wobei die Diracsche Delta-Funktion (eigentlich Delta-Distribution) die Eigenschaft

$$\int_V \mathrm{d}^3 r f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \text{falls } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{falls } \mathbf{r}_0 \notin V \end{cases} \tag{1.4}$$

hat.
Ähnlich definiert man die Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ an Grenz- oder Oberflächen als Ladung pro Fläche

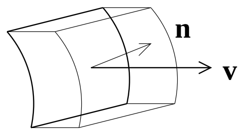
$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}f}, \tag{1.5}$$

ähnlich auch die Linienladungsdichte.

1.a.β Strom und Stromdichte

Der Strom I ist die Ladung dq, die pro Zeiteinheit dt durch eine Fläche F fließt,

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{1.6}$$



Es sei nun $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ die mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger, $\mathbf{n}$ die (auf die Länge 1 normierte) Flächennormale. Dann ist $\mathbf{v}\mathrm{d}t$ der Weg, den die Ladungen in der Zeit dt zurücklegen. Multipliziert mit $\mathbf{n}$ ergibt sich die Schichtdicke $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\mathrm{d}t$, die die in der Zeit d$t$ durch die Fläche geflossenen Ladungen bilden.Multipliziert mit dem Flächenelement df ergibt sich das Volumen der Ladung, die durch df geflossen ist. Weitere Multiplikation mit der Ladungsdichte ρ ergibt die Ladung dq, die in der Zeit dt durch die Fläche df tritt

$$\mathrm{d}q = \int_F \mathbf{v}\mathrm{d}t \cdot \mathbf{n}\mathrm{d}f\rho \tag{1.7}$$

$$I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t = \int_F \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\rho(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})\mathrm{d}f = \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} \tag{1.8}$$

mit der Stromdichte $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ und dem gerichteten Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathbf{n}\mathrm{d}f$.

1.a.γ Ladungserhaltung und Kontinuitätsgleichung

Die Ladung q in einem festen Volumen V

$$q(t) = \int_V \mathrm{d}^3r\rho(\mathbf{r}, t) \tag{1.9}$$

ändert sich pro Zeiteinheit um

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \int_V \mathrm{d}^3r\frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \tag{1.10}$$

Da die Ladung erhalten ist, kann sie sich nur durch einen Strom durch die Oberfläche ∂V des Volumens ändern. Wir bezeichnen mit I den nach außen fließenden Strom. Dann ist

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = -I(t) = -\int_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = -\int_V \mathrm{d}^3r \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \tag{1.11}$$

wobei wir vom Gaussschen Satz (B.59) Gebrauch machten. Da die Beziehungen (1.10) und (1.11) für jedes Volumen und auch jedes Volumenelement gilt, folgt die Gleichheit der Integranden in den beiden Volumenintegralen

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{1.12}$$

Diese Gleichung bezeichnet man als Kontinuitätsgleichung. Sie drückt in differentieller Form die Erhaltung der Ladung aus.

1.b Maxwell-Gleichungen

Die elektrischen Ladungen und Ströme erzeugen das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Diese Beziehung wird durch die vier Maxwell-Gleichungen beschrieben

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{c\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \tag{1.13}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) \tag{1.14}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{c\partial t} = \mathbf{0} \tag{1.15}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{1.16}$$

Diese MAXWELL-Gleichungen werden bisweilen als MAXWELL-Gleichungen im Vakuum bezeichnet. Sie gelten jedoch auch in Materie. Die Ladungsdichte und die Stromdichte enthalten alle Beiträge, also freibewegliche und Polarisations-Ladungsdichten und freibewegliche, Polarisations- und Magnetisierungs-stromdichten.
Vielfach verlangt man als Randbedingung noch, dass das elektrische und das magnetische Feld im Unendlichen verschwinden.

1.c COULOMB- und LORENTZ-Kraft

Das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ üben auf eine Ladung q am Ort $\mathbf{r}$, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt, die Kraft

$$\mathbf{K} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{1.17}$$

aus.
Dabei sind $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ die Beiträge, die nicht von q selbst herrühren. Die von q selbst erzeugten Felder bewirken die Reaktionskraft, die wir jedoch im Weiteren nicht betrachten.
Der erste Beitrag in (1.17) ist die COULOMB-Kraft, der zweite die LORENTZ-Kraft. Dabei ist c= 299 792 458 m/s. Wir werden später sehen, dass diese Konstante die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. (Man hat sie zu obigem Wert definiert und damit den Umrechnungsfaktor zwischen Zeit und Länge festgelegt.) Die Kraft, die auf ein kleines Volumen ΔV wirkt, lässt sich schreiben als

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{k}(\mathbf{r})\Delta V \tag{1.18}$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{1.19}$$

Man bezeichnet $\mathbf{k}$ als die Kraftdichte. Die auf das Volumen V wirkende elektromagnetische Kraft ergibt sich dann zu

$$\mathbf{K} = \int_V \mathrm{d}^3r\,\mathbf{k}(\mathbf{r}). \tag{1.20}$$

2 Dimensionen und Einheiten

2.a Gaussches Maßsystem

In dieser Vorlesung verwenden wir das Gausssche Maßsystem. Wir betrachten nun die Dimensionen der auftretenden Größen. Aus der Kontinuitätsgleichung (1.12) und den Maxwellgleichungen (1.13) bis (1.16) folgt

$$\begin{aligned} [\rho]/[t] &= [j]/[x] & (2.1)\\ [B]/[x] &= [E]/([c][t]) = [j]/[c] & (2.2)\\ [E]/[x] &= [B]/([c][t]) = [\rho]. & (2.3) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} [j] &= [\rho][x]/[t] & (2.4)\\ [E] &= [\rho][x] & (2.5)\\ [B] &= [\rho][c][t] = [\rho][x]^2/([c][t]), & (2.6) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} [c] &= [x]/[t] & (2.7)\\ [B] &= [\rho][x]. & (2.8) \end{aligned}$$

Daraus sieht man, dass c tatsächlich die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Um die weiteren Größen in ihrer Dimension festzulegen, müssen wir noch den Ausdruck (1.19) für die Kraftdichte k verwenden

$$[k] = [\rho][E] = [\rho]^2[x]. \tag{2.9}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} [\rho]^2 &= [k]/[x] = \text{dyn cm}^{-4} & (2.10)\\ [\rho] &= \text{dyn}^{1/2}\ \text{cm}^{-2} & (2.11)\\ [E] = [B] &= \text{dyn}^{1/2}\ \text{cm}^{-1} & (2.12)\\ [j] &= \text{dyn}^{1/2}\ \text{cm}^{-1}\ \text{s}^{-1} & (2.13)\\ [q] &= [\rho][x]^3 = \text{dyn}^{1/2}\ \text{cm} & (2.14)\\ [I] &= [j][x]^2 = \text{dyn}^{1/2}\ \text{cm s}^{-1}. & (2.15) \end{aligned}$$

2.b Andere Einheitensysteme

Für jede Größe kann die Einheit in jedem System unabhängig definiert werden. Glücklicherweise macht man davon nicht vollständigen Gebrauch.

Neben dem Gaussschen Maßsystem werden noch eine Reihe weiterer cgs-Systeme sowie das SI-System (internationales Maßsystem, Giorgi-System) verwendet. Letzteres ist das gesetzliche Maßsystem in vielen Ländern (z.B. in USA seit 1894, in Deutschland seit 1898) und wird in der Technik angewandt.

Während das Gausssche Maßsystem alle elektromagnetischen Größen in cm, g und s ausdrückt, verwendet das Giorgi-System neben den mechanischen Einheiten m, kg und s noch zwei weitere Einheiten A (Ampere) und V (Volt), allerdings nicht unabhängig voneinander, vielmehr gilt für die Einheit der Energie

$$1\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-2} = 1\ \text{J} = 1\ \text{W s} = 1\ \text{A V s}. \tag{2.16}$$

Die Umrechnung einiger gebräuchlicher Maßsysteme ineinander kann durch drei Umrechnungsfaktoren ϵ_0, μ_0 und ψ beschrieben werden. Dabei können ϵ_0 und μ_0 (im SI-System als Dielektrizitätskonstante und Permeabilitätskonstante des Vakuums bekannt) und die Verkettungskonstante

$$\gamma = c\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \tag{2.17}$$

dimensionsbehaftet sein, während ψ ein dimensionsloser Zahlenfaktor ist. Man unterscheidet zwischen rationalen Maßsystemen ($\psi = 4\pi$) und nicht rationalen Maßsystemen ($\psi = 1$). Die Umrechnungsfaktoren einiger gebräuchlicher Maßsysteme sind

Maßsystem	ϵ_0	μ_0	γ	ψ
GAUSS	1	1	c	1
Elektrostatisch (esu)	1	c^{-2}	1	1
Elektromagnetisch (emu)	c^{-2}	1	1	1
HEAVISIDE-LORENTZ	1	1	c	4π
GIORGI (SI)	$(c^2\mu_0)^{-1}$	$\frac{4\pi}{10^7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$	1	4π

Die bisher eingeführten Größen drücken sich durch die Größen der anderen Maßsysteme (mit einem Stern versehen) folgendermaßen aus

$$\mathbf{E} = \sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1} \widehat{=} 3\cdot 10^4 \mathrm{V/m} \tag{2.18}$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{\psi/\mu_0}\mathbf{B}^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1} \widehat{=} 10^{-4} \mathrm{Vs/m}^2 \tag{2.19}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{\psi\epsilon_0}} q^* \qquad 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm} \widehat{=} 10^{-9}/3\mathrm{As}, \text{ ähnlich } \rho, \sigma, I, j. \tag{2.20}$$

Ein Umrechnungsbeispiel: Die COULOMB-LORENTZ-Kraft lässt sich schreiben

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = \frac{q^*}{\sqrt{\psi\epsilon_0}}(\sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^* + \frac{\sqrt{\psi}}{c\sqrt{\mu_0}}\mathbf{v}\times\mathbf{B}^*) = q^*(\mathbf{E}^* + \frac{1}{c\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\mathbf{v}\times\mathbf{B}^*) = q^*(\mathbf{E}^* + \frac{1}{\gamma}\mathbf{v}\times\mathbf{B}^*). \tag{2.21}$$

Die Elementarladung e_0 ist in dem von uns verwendeten GAUSSschen Maßsystem $4.803\cdot 10^{-10}$ $\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm und im SI-System $1.602\cdot 10^{-19}$ As. Das Elektron trägt die Ladung $-e_0$, das Proton e_0, ein Kern der Kernladungszahl Z die Ladung Ze_0, Quarks die Ladungen $\pm e_0/3$ oder $\pm 2e_0/3$.
Weitere Angaben werden jeweils bei der Einführung weiterer Größen gegeben und sind im Anhang A zusammengefasst.

2.c Motivation für GAUSSsche Einheiten

Im SI-System sind das elektrische Feld **E** und die dielektrische Verschiebung **D** wie auch die magnetische Induktion **B** und das Magnetfeld **H** mit unterschiedlichen Dimensionen behaftet. Hierdurch wird leicht der irreführende Eindruck erweckt, es handele sich um unabhängige Felder. Auf einem mikroskopischen Niveau hat man es nur mit zwei Feldern, **E** und **B** zu tun, (1.13-1.16) (LORENTZ 1892).
Tatsächlich wird der zweite Satz Felder nur dadurch eingeführt, dass man Polarisations- und Magnetisierungsanteile der Ladungen und Ströme in Materie aus den totalen Ladungen und Strömen herauszieht und zu den Feldern addiert (Abschnitt 6 und 11).
Dieser enge Zusammenhang kommt besser in einem cgs-System zum Ausdruck, in dem **E** und **D** gleiche Dimension haben wie auch **B** und **H**.
Leider gehört das GAUSSsche Maßsystem zu den irrationalen, während das SI-System ein rationales ist, so dass bei Umrechnungen auch immer Faktoren 4π auftreten. Ich hätte ein rationales Maß-System wie das von HEAVISIDE und LORENTZ vorgezogen. Leider wird aber in gängigen Lehrbüchern nur das SI-System und das GAUSSsche verwendet. Ich möchte die Studierenden nicht mit einem Maßsystem konfrontieren, mit dem praktisch kein Lehrbuch arbeitet.