Anhänge

Appendices

A Umrechnung zwischen Maßsystemen der Elektrodynamik

Neben dem GAUSSschen Maßsystem werden noch eine Reihe weiterer cgs-Systeme sowie das SI-System (internationales Maßsystem, GIORGI-System) verwendet.

Während das GAUSSsche Maßsystem alle elektromagnetischen Größen in cm, g und s ausdrückt, verwendet das GIORGI-System neben den mechanischen Einheiten m, kg und s noch zwei weitere Einheiten A (Ampere) und V (Volt), allerdings nicht unabhängig voneinander, vielmehr gilt für die Einheit der Energie

A Connection between different Systems of Units

Besides the GAUSSian system of units a number of other cgs-systems is used as well as the SI-system (international system of units, GIORGI-system).

Whereas all electromagnetic quantities in the GAUSSIAN system are expressed in cm, g und s, the GIORGI-system uses besides the mechanical units m, kg und s two other units, A (ampere) und V (volt). They are not independent, but related by the unit of energy

$$1\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}} = 1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{W\ s} = 1\ \mathrm{A\ V\ s}. \tag{A.1}$$

Die Umrechnung einiger gebräuchlicher Maßsysteme ineinander kann durch drei Umrechnungsfaktoren ϵ_0, μ_0 und ψ beschrieben werden. Dabei können ϵ_0 und μ_0 (im SI-System als Dielektrizitätskonstante und Permeabilitätskonstante des Vakuums bekannt) und die Verkettungskonstante

The conversion of some conventional systems of units can be described by three conversion factors ϵ_0, μ_0 and ψ. The factors ϵ_0 and μ_0 (known as the dielectric constant and permeability constant of the vacuum in the SI-system) and the interlinking factor

$$\gamma = c\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \tag{A.2}$$

dimensionsbehaftet sein, während ψ ein dimensionsloser Zahlenfaktor ist. Man unterscheidet zwischen rationalen Maßsystemen ($\psi = 4\pi$) und nicht rationalen Maßsystemen ($\psi = 1$). Die Umrechnungsfaktoren einiger gebräuchlicher Maßsysteme sind

can carry dimensions whereas ψ is a dimensionless number. One distinguishes between rational systems $\psi = 4\pi$) and non-rational systems ($\psi = 1$). The conversion factors of some conventional systems of units are

Maßsystem / System of Units	ϵ_0	μ_0	γ	ψ
GAUSS / GAUSSIAN	1	1	c	1
Elektrostatisch / Electrostatic (esu)	1	c^{-2}	1	1
Elektromagnetisch / Electromagnetic (emu)	c^{-2}	1	1	1
HEAVISIDE-LORENTZ	1	1	c	4π
GIORGI (SI)	$(c^2\mu_0)^{-1}$	$\frac{4\pi}{10^7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$	1	4π

Die Feldstärken im GAUSSschen Maßsystem drücken sich durch die Größen der anderen Maßsysteme (mit einem Stern versehen) folgendermaßen aus

The field intensities are expressed in GAUSSian units by those of other systems (indicated by an asterisk) in the following way

$$\mathbf{E} = \sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{E}^*$$ analog elektrisches Potential / analogously electric potential

$$\mathbf{D} = \sqrt{\psi/\epsilon_0}\mathbf{D}^*$$

$$\mathbf{P} = 1/\sqrt{\psi\epsilon_0}\mathbf{P}^* \quad \text{analog Ladung, Strom und deren Dichten, analogously charge, current and their densities, elektrische Momente / electric moments} \tag{A.3}$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{\psi/\mu_0}\mathbf{B}^* \quad \text{analog Vektorpotential, magnetischer Fluss / analogously vector potential, magnetic flux}$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\psi\mu_0}\mathbf{H}^*$$

$$\mathbf{M} = \sqrt{\mu_0/\psi}\mathbf{M}^* \quad \text{analog magnetische Momente / analogously magnetic moments}$$

Für die mit Leitfähigkeit und Widerstand verknüpften Größen gilt

One has for the quantities connected with conductivity and resistance

$$\sigma = 1/(\psi\epsilon_0)\sigma^* \quad \text{analog Kapazität / analogously capacity}$$
$$R = \psi\epsilon_0 R^* \quad \text{analog Induktivität / analogously inductance} \tag{A.4}$$

Für die elektrische und magnetische Suszeptibilität gilt

For the electric and magnetic susceptibilities one obtains

$$\chi = \chi^*/\psi. \tag{A.5}$$

Wir erhalten damit die folgenden Gleichungen für beliebige Maßsysteme (d.h. der * ist jetzt weggelassen): Die MAXWELL-Gleichungen in Materie lauten dann

We obtain the following equations for arbitrary systems of units (the * has now been removed): MAXWELL's equations in matter read now

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{\gamma}(\dot{\mathbf{D}} + \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{j}_f), \tag{A.6}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \frac{4\pi}{\psi}\rho_f, \tag{A.7}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma}\dot{\mathbf{B}}, \tag{A.8}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{A.9}$$

Für die Materialgleichungen folgt

The material equations read

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{P}, \tag{A.10}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \frac{4\pi}{\psi}\mathbf{M}. \tag{A.11}$$

Für die LORENTZ-Kraft folgt

For the LORENTZ force one obtains

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{\gamma}) \tag{A.12}$$

Für die Energiedichte u und den POYNTING-Vektor $\mathbf{S}$ folgen

For the energy density u and the POYNTING vector $\mathbf{S}$ on obtains

$$u = \frac{\psi}{4\pi}\int(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}), \tag{A.13}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\psi\gamma}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}. \tag{A.14}$$

Während im GAUSSschen System alle Feldgrößen **E**, **D**, **P**, **B**, **H** und **M** in der Einheit

Whereas in GAUSSian units all the fields **E**, **D**, **P**, **B**, **H** and **M** are measured in units

$$\sqrt{\text{dyn}}/\text{cm} = \sqrt{\text{erg/cm}^3} \tag{A.15}$$

gemessen werden, werden im GIORGI-System **E** in V/m, **D** und **P** in As/m^2, **B** in Vs/m^2, **H** und **M** in A/m gemessen.

Je nach Feldgröße entspricht 1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1} im GAUSSschen System den folgenden Werten im GIORGI-System (analog für die weiteren in (A.3) und (A.4) angegebenen Größen)

the GIORGI system measures **E** in V/m, **D** and **P** in As/m^2, **B** in Vs/m^2, **H** and **M** in A/m.

Depending on the quantity 1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1} in units of the GAUSSIAN system corresponds to (analogously for the quantities listed in (A.3) and (A.4))

$$\mathbf{E} = 3 \cdot 10^4 \text{ V/m} \tag{A.16}$$
$$\mathbf{D} = 10^{-5}/(12\pi) \text{ As/m}^2 \tag{A.17}$$
$$\mathbf{P} = 10^{-5}/3 \text{ As/m}^2 \tag{A.18}$$
$$\mathbf{B} = 10^{-4} \text{ Vs/m}^2 \tag{A.19}$$
$$\mathbf{H} = 10^3/(4\pi) \text{ A/m} \tag{A.20}$$
$$\mathbf{M} = 10^3 \text{ A/m.} \tag{A.21}$$

Für Widerstände gilt $c^{-1} \hat{=} 30\Omega$. Für genaue Berechnungen sind die Faktoren 3 (auch die 3 in $12 = 4 \cdot 3$) durch den Faktor 2.99792458 zu ersetzen. Diese Zahl multipliziert mit 10^8m/s ist die Lichtgeschwindigkeit.

For resistors one has $c^{-1} \hat{=} 30\Omega$. For precise calculations the factors 3 (including the 3 in $12 = 4 \cdot 3$) are to be replaced by the factor 2.99792458. This number multiplied by 10^8 m/s is the speed of light.

Für folgende vielgebrauchte Einheiten im GAUSSschen und im elektromagnetischen System sind eigene Namen üblich:

There are special names for the following often used units in the GAUSSian and electromagnetic system

magnetische Induktion / magnetic induction	1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1}=1 G (Gauß)
magnetische Feldstärke / magnetic field intensity	1 dyn$^{1/2}$ cm^{-1}=1 Oe (Oerstedt)
magnetischer Fluss / magnetic flux	1 dyn$^{1/2}$ cm =1 Mx (Maxwell)

Im SI-System haben außer Ampere und Volt folgende Größen einen eigenen Namen:

The following quantities besides Ampere and Volt have their own names in the SI-system:

Ladung / charge	1 As =1 C (Coulomb)
Widerstand / resistance	1 V/A =1 Ω (Ohm)
Leitwert / conductance	1 A/V =1 S (Siemens)
Kapazität / capacitance	1 As/V =1 F (Farad)
Induktivität / inductivity	1 Vs/A =1 H (Henry)
magnetischer Fluss / magnetic flux	1 Vs =1 Wb (Weber)
magnetische Induktion / magnetic induction	1 Vs/m^2=1 T (Tesla).

Historisch ist das internationale oder SI-System aus dem elektromagnetischen System entstanden. Da in diesem die Einheiten für praktische Zwecke unbequem groß oder klein waren, wählte man für die Stromstärke 1 A = 10^{-1} dyn$^{1/2}$ und für die Spannung 1 V = 10^8 dyn$^{1/2}$ cm s^{-1}. GIORGI entdeckte, dass dann beim Übergang auf mks-Einheiten die Beziehung (A.1) gilt. Allerdings ging man dann vom nicht rationalen zum rationalen System über.

Historically the international or SI system was derived from the electromagnetic system. Since the units of this system where inconveniently large or small one introduced as unit for the current 1 A = 10^{-1} dyn$^{1/2}$ and for the voltage 1 V = 10^8 dyn$^{1/2}$ cm s^{-1}. GIORGI realized that changing to mks-units one obtains the relation (A.1). However, one changed also from non-rational to rational units.

B Formeln zur Vektorrechnung

B Formulae for Vector Calculus

Der Leser möge die Aufgaben B.11, B.15, B.34-B.50 und die Aufgabe nach B.71 selbst lösen oder die Ergebnisse dem Skriptum an anderer Stelle entnehmen.

The reader is asked to solve the exercises B.11, B.15, B.34-B.50 and the exercise after B.71 by her- or himself or to take the results from the script where they are used.

B.a Vektoralgebra

B.a Vector Algebra

B.a.α Summationskonvention und orthonormale Basis

B.a.α Summation Convention and Orthonormal Basis

Wir verwenden die Summationskonvention, die besagt, daß über alle Indices, die zweimal in einem Produkt auftreten, summiert wird. Daher steht

We use the summation convention which says that summation is performed over all indices, which appear twice in a product. Therefore

$$\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{B.1}$$

für

stands for

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha \mathbf{e}_\alpha = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

Wir setzen im Folgenden voraus, daß die Vektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in der Zerlegung (B.1) ein orthonormales und ortsunabhängiges Rechtssystem darstellen. Dann sind a_1, a_2, a_3 die Komponenten des Vektors $\mathbf{a}$ bezüglich der Basis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

In the following we assume that the vectors $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in (B.1) represent an orthonormal and space independent right-handed basis. Then a_1, a_2, a_3 are the components of the vector $\mathbf{a}$ with respect to the basis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

B.a.β Skalarprodukt

B.a.β Scalar Product

Für das Skalarprodukt gilt

The scalar product is defined by

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = a_\alpha b_\alpha, \tag{B.2}$$

insbesondere

in particular we have

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 \ \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{für}}{\text{for}} \ \alpha = \beta \\ 0 \ \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{für}}{\text{for}} \ \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{B.3}$$

mit dem gegen Vertauschen der Indices symmetrischen Kronecker-Symbol $\delta_{\alpha,\beta}$, und

with the Kronecker symbol $\delta_{\alpha,\beta}$ which is symmetric in its indices, and

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha = a_\alpha. \tag{B.4}$$

B.a.γ Vektorielles Produkt

B.a.γ Vector Product

Für das vektorielle Produkt gilt

The vector product is given by

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha b_\beta \mathbf{e}_\gamma = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \tag{B.5}$$

mit dem total antisymmetrischen LEVI-CIVITA-Symbol

with the total antisymmetric LEVI-CIVITA symbol

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 & \text{für / for } (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & \text{für / for } (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) \\ 0 & \text{sonst / otherwise} \end{cases} \tag{B.6}$$

Mit Determinanten schreibt man

Using determinants it can be written

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha,1} & \delta_{\beta,1} & \delta_{\gamma,1} \\ \delta_{\alpha,2} & \delta_{\beta,2} & \delta_{\gamma,2} \\ \delta_{\alpha,3} & \delta_{\beta,3} & \delta_{\gamma,3} \end{vmatrix}. \tag{B.7}$$

Durch Multiplikation mit a_α, b_β und $\mathbf{e}_\gamma$ und Ausführen der Summe erhält man aus (B.5)

From (B.5) one obtains by multiplication with a_α, b_β and $\mathbf{e}_\gamma$ and summation

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathbf{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}. \tag{B.8}$$

Insbesondere gilt

In particular one obtains

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{B.9}$$

und

and

$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \mathbf{e}_\gamma. \tag{B.10}$$

Man drücke die Summe

Express the sum

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \epsilon_{\zeta,\eta,\gamma} = \tag{B.11}$$

mit Hilfe von KRONECKER-Deltas aus.

by means of KRONECKER deltas.

B.a.δ Mehrfachprodukte

B.a.δ Multiple Products

Für das Spatprodukt gilt

For the scalar triple product one has

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha b_\beta c_\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{B.12}$$

Es ist

One has

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]. \tag{B.13}$$

Für das Dreifach-Produkt folgt

For the vector triple product one has

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}. \tag{B.14}$$

Man drücke das Vierfach-Produkt

Express the quadruple product

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \tag{B.15}$$

mit Hilfe von (B.11) oder (B.14) durch Skalarprodukte aus.

by means of (B.11) or (B.14) in terms of scalar products.

B.b Vektoranalysis

B.b.α Räumliche Differentiation, Nabla-Operator

Die räumliche Differentiation wird mit dem Nabla-Operator ∇ durchgeführt. Er ist ein Differential-Operator mit Vektoreigenschaften, in kartesischen Koordinaten

B.b Vector Analysis

B.b.α Differentiation in Space, Del Operator

Differentiation in space is performed by means of the del-Operator ∇. It is a differential operator with vector properties. In cartesian coordinates it is written

$$\nabla = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha, \tag{B.16}$$

wobei ∂_α für $\partial/\partial x_\alpha$ steht. Man bezeichnet

where ∂_α stands for $\partial/\partial x_\alpha$. One calls

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}) = \operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) \tag{B.17}$$

als Gradient,

the gradient,

$$(\mathbf{b}(\mathbf{r})\nabla)\mathbf{a}(\mathbf{r}) = b_\alpha(\mathbf{r})\partial_\alpha \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{b}(\mathbf{r}) \operatorname{grad})\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.18}$$

als Vektorgradient,

the vector gradient

$$\nabla\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \partial_\alpha a_\alpha(\mathbf{r}) = \operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.19}$$

als Divergenz und

the divergence and

$$\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta)\partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r}) = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r})\mathbf{e}_\gamma = \operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r}) \tag{B.20}$$

als Rotation.

the curl.

B.b.β Zweifache Ableitung, Laplace-Operator

Soweit die Differentiationen vertauschbar sind, gilt

B.b.β Second Derivatives, Laplacian

As far as differentiations do commute one has

$$\nabla \times \nabla = \mathbf{0}, \tag{B.21}$$

woraus

from which

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{B.22}$$
$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r}) = 0 \tag{B.23}$$

folgt. Das Skalarprodukt

follows. The scalar product

$$\nabla \cdot \nabla = \partial_\alpha \partial_\alpha = \triangle \tag{B.24}$$

wird als Laplace-Operator bezeichnet. Daher ist

is called the Laplacian. Therefore one has

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) = \triangle\Phi(\mathbf{r}). \tag{B.25}$$

Man findet

One obtains

$$\triangle\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r}), \tag{B.26}$$

indem man in (B.14) **a** and **b** durch ∇ ersetzt und den Vektor **c** stets auf die rechte Seite schafft.

by replacing **a** and **b** by ∇ in (B.14) and bringing the vector **c** always to the right.

B.b.γ Ableitung von Produkten

Bei Anwendung des Nabla-Operators auf Produkte von zwei Faktoren erhält man gemäß der Produkt-Regel zwei Summanden, indem man einmal den ersten Faktor differenziert und den zweiten konstant hält, und zum zweiten den zweiten Faktor differenziert und den ersten festhält. Dann formt man unter Berücksichtigung des Vektor-Charakters des Nabla-Operators die Ausdrücke so um, dass die konstant gehaltenen Faktoren links, die zu differenzierenden rechts vom Nabla-Operator stehen. Man findet

B.b.γ Derivatives of Products

Application of the del operator onto a product of two factors yields according to the product rule two contributions. In one contribution one differentiates the first factor and keeps the second one constant, in the other contribution one differentiates the second factor and keeps the first constant. Then the expressions have to be rearranged, so that the constant factors are to the left, those to be differentiated to the right of the del operator. In doing this one has to keep the vector character of the del in mind. Then one obtains

$$\operatorname{grad}(\Phi\Psi) = \Phi \operatorname{grad}\Psi + \Psi \operatorname{grad}\Phi \tag{B.27}$$
$$\operatorname{div}(\Phi\mathbf{a}) = \Phi \operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}\Phi \tag{B.28}$$
$$\operatorname{rot}(\Phi\mathbf{a}) = \Phi \operatorname{rot}\mathbf{a} + (\operatorname{grad}\Phi)\times\mathbf{a} \tag{B.29}$$
$$\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b} \tag{B.30}$$
$$\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{b}\operatorname{grad})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{b} \tag{B.31}$$
$$\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a} + (\mathbf{b}\operatorname{grad})\mathbf{a} + (\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{b} \tag{B.32}$$
$$\triangle(\Phi\Psi) = \Phi\triangle\Psi + \Psi\triangle\Phi + 2(\operatorname{grad}\Phi)\cdot(\operatorname{grad}\Psi). \tag{B.33}$$

B.c Spezielle Ausdrücke

Man bestimme für $r = |\mathbf{r}|$ und für konstanten Vektor $\mathbf{c}$

B.c Special Expressions

Calculate for $r = |\mathbf{r}|$ and constant vector $\mathbf{c}$

$$\operatorname{grad} r^2 = \tag{B.34}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{r} = \tag{B.35}$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{r} = \tag{B.36}$$
$$\operatorname{grad}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}) = \tag{B.37}$$
$$(\mathbf{c}\operatorname{grad})\mathbf{r} = \tag{B.38}$$
$$\operatorname{grad} f(r) = \tag{B.39}$$
$$\operatorname{div}(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) = \tag{B.40}$$
$$\operatorname{rot}(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) = \tag{B.41}$$
$$\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \tag{B.42}$$
$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{c}}{r} = \tag{B.43}$$
$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{c}}{r} = \tag{B.44}$$
$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \tag{B.45}$$
$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \tag{B.46}$$
$$\operatorname{grad}\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \tag{B.47}$$
$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{r}}{r^3} = \tag{B.48}$$
$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{r}}{r^3} = \tag{B.49}$$

$$\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{c}|} \quad = \quad , \tag{B.50}$$

wobei singuläre Punkte auszunehmen seien.

with the exception of singular points.

B.d Integral-Sätze

B.d Integral Theorems

B.d.α Linien-Integrale

B.d.α Line Integrals

Für ein skalares oder vektorielles Feld $A(\mathbf{r})$ gilt

For a scalar or a vector field $A(\mathbf{r})$ one has

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (\mathrm{d}\mathbf{r}\nabla)A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}_2) - A(\mathbf{r}_1), \tag{B.51}$$

das heißt

that is

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\mathbf{r} \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1), \tag{B.52}$$

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (\mathrm{d}\mathbf{r} \operatorname{grad})\mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad = \quad \mathbf{a}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{a}(\mathbf{r}_1). \tag{B.53}$$

B.d.β Flächen-Integrale

B.d.β Surface Integrals

Nach Stokes lässt sich ein Flächenintegral über die Fläche F der Form

According to Stokes a surface integral over F of the form

$$\int_F (\mathrm{d}\mathbf{f} \times \nabla)A(\mathbf{r}) = \oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r}A(\mathbf{r}) \tag{B.54}$$

in ein Linienintegral über den Rand ∂F umformen, wobei das Linienintegral im Rechtschraubensinn zur Richtung von $\mathrm{d}\mathbf{f}$ zu führen ist (Korkenzieherregel). Insbesondere folgt

can be rewritten as a line integral over the curve ∂F bounding the surface. The direction is given by the right-hand rule; that is, if the thumb of your right hand points in the direction of $\mathrm{d}\mathbf{f}$, your fingers curve in the direction $\mathrm{d}\mathbf{r}$ of the line integral,

$$\int_F \mathrm{d}\mathbf{f} \times \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r}\Phi(\mathbf{r}), \tag{B.55}$$

$$\int_F \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad = \quad \oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}). \tag{B.56}$$

B.d.γ Volumen-Integrale

B.d.γ Volume Integrals

Nach Gauss lässt sich ein Volumenintegral der Form

According to Gauss a volume integral of the form

$$\int_V \mathrm{d}^3r \nabla A(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f}A(\mathbf{r}) \tag{B.57}$$

in ein Integral über die Oberfläche ∂V umformen. Dabei weist $\mathrm{d}\mathbf{f}$ nach außen. Insbesondere folgt

can be converted into an integral over the surface ∂V of the volume. The vector $\mathrm{d}\mathbf{f}$ points out of the volume. In particular one has

$$\int_V \mathrm{d}^3r \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f}\Phi(\mathbf{r}), \tag{B.58}$$

$$\int_V \mathrm{d}^3r \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad = \quad \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}), \tag{B.59}$$

$$\int_V \mathrm{d}^3r \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad = \quad \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}). \tag{B.60}$$

B.d.δ Volumen-Integrale über Produkte

Setzt man für $\Phi(\mathbf{r})$ oder $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in den Gleichungen (B.58-B.60) Produkte ein und verwendet die Gleichungen (B.27-B.30), so erhält man

B.d.δ Volume Integrals of Products

If one substitutes products for $\Phi(\mathbf{r})$ or $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in equations (B.58-B.60) and applies equations (B.27-B.30), then one obtains

$$\int_V d^3r\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) + \int_V d^3r\Psi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\Phi(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}), \tag{B.61}$$

$$\int_V d^3r\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_V d^3r\mathbf{a}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}), \tag{B.62}$$

$$\int_V d^3r\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) + \int_V d^3r(\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}))\times\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\times\mathbf{a}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}), \tag{B.63}$$

$$\int_V d^3r\mathbf{b}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \int_V d^3r\mathbf{a}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\mathbf{a}(\mathbf{r})\times\mathbf{b}(\mathbf{r})). \tag{B.64}$$

Diese Gleichungen erlauben die Umformung eines Volumen-Integrals in ein anderes Volumen-Integral und ein Oberflächen-Integral. Dies ist die Übertragung der partiellen Integration von einer auf drei Dimensionen.
In vielen Fällen verschwindet das Oberflächenintegral im Limes eines unendlichen Volumens, so dass die Gleichungen (B.61-B.64) die Umformung eines Volumenintegrals in ein anderes erlauben.

These equations allow the transformation of a volume integral into another one and a surface integral. This is the generalization of integration by parts from one dimension to three.

In many cases the surface integral vanishes in the limit of infinite volume, so that the equations (B.61-B.64) allow the conversion from one volume integral into another one.

Ersetzt man $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.62) durch $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r})$ oder $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ in (B.64) durch $\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})$, so folgt wegen (B.22) und (B.23)

If one replaces $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.62) by $\mathrm{curl}\,\mathbf{a}(\mathbf{r})$ or $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ in (B.64) by $\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})$, then one obtains with (B.22) and (B.23)

$$\int_V d^3r\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\mathbf{a}(\mathbf{r})\times\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(\mathbf{r})). \tag{B.65}$$

Ähnlich erhält man aus (B.63)

Similarly one obtains from (B.63)

$$\int_V d^3r\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})\times\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\times(\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}))\Phi(\mathbf{r}) = -\int_{\partial V} d\mathbf{f}\times(\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}))\Psi(\mathbf{r}). \tag{B.66}$$

Ersetzt man $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.59) durch $\Phi\,\mathrm{grad}\,\Psi - \Psi\,\mathrm{grad}\,\Phi$, so folgt der Greensche Satz

If one replaces $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in (B.59) by $\Phi\,\mathrm{grad}\,\Psi - \Psi\,\mathrm{grad}\,\Phi$, then one obtains Green's theorem

$$\int_V d^3r(\Phi(\mathbf{r})\triangle\Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r})\triangle\Phi(\mathbf{r})) = \int_{\partial V} d\mathbf{f}\cdot(\Phi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})). \tag{B.67}$$

B.e Der Laplace-Operator von $1/r$ und Verwandtes

B.e The Laplacian of $1/r$ and Related Expressions

B.e.α Der Laplace-Operator von $1/r$

Für $r \neq 0$ findet man $\triangle(1/r) = 0$. Wertet man das Integral über eine Kugel vom Radius R unter Verwendung von (B.59) aus,

B.e.α The Laplacian of $1/r$

For $r \neq 0$ one finds $\triangle(1/r) = 0$. If one evaluates the integral over a sphere of radius R by use of (B.59),

$$\int \triangle(\frac{1}{r})d^3r = \int d\mathbf{f}\cdot\,\mathrm{grad}\,(\frac{1}{r}) = -\int \mathbf{r}r d\Omega\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -4\pi \tag{B.68}$$

mit dem Raumwinkelelement $d\Omega$, so erhält man -4π. Man schreibt daher

with the solid-angle element $d\Omega$, then one obtains -4π. Therefore one writes

$$\triangle(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}), \tag{B.69}$$

wobei DIRACs Delta-"Funktion" $\delta^3(\mathbf{r})$ (eigentlich eine Distribution) die Eigenschaft

where DIRAC's delta "function" $\delta^3(\mathbf{r})$ (actually a distribution) has the property

$$\int_V d^3r\, f(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \text{falls / if } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst / otherwise.} \end{cases} \tag{B.70}$$

hat. Aus

From

$$\triangle\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \mathbf{c}\triangle\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\mathbf{c}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

folgt mit (B.26,B.43,B.44)

one obtains with (B.26,B.43,B.44)

$$4\pi\mathbf{c}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \operatorname{grad}\frac{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \operatorname{rot}\frac{\mathbf{c}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{B.71}$$

Man bestimme die δ-Funktions-Anteile in (B.45) bis (B.49). Welche Dimension hat $\delta^3(\mathbf{r})$?

Determine the δ-function contributions in (B.45) to (B.49). What is the dimension of $\delta^3(\mathbf{r})$?

B.e.β Darstellung eines Vektorfeldes als Summe eines rotationsfreien und eines divergenzfreien Feldes

B.e.β Representation of a Vector Field as a Sum of an Irrotational and a Divergence-free Field

Wir schreiben das Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ als

We rewrite the vector field $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ in the form

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int d^3r'\,\mathbf{a}(\mathbf{r}')\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{B.72}$$

und erhalten aus (B.71), da $\mathbf{a}(\mathbf{r}')$ nicht von $\mathbf{r}$ abhängt,

and obtain from (B.71), since $\mathbf{a}(\mathbf{r}')$ does not depend on $\mathbf{r}$

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\operatorname{grad}\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\operatorname{rot}\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{B.73}$$

was sich als

which may be written as

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) + \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{B.74}$$

mit

with

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{B.75}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{B.76}$$

schreiben lässt. Falls die Integrale (B.75) und (B.76) existieren, erhält man auf diese Weise eine Darstellung von $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ als Summe des rotationsfreien Feld $-\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})$ und des divergenzfreien Feldes $\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Mit (B.48) folgt

. If the integrals (B.75) and (B.76) exist, then one obtains in this way a representation of $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ as sum of the irrotational field $-\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r})$ and the divergence free field $\operatorname{curl}\mathbf{A}(\mathbf{r})$. With (B.48) one finds

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \tag{B.77}$$

C Kugelflächenfunktionen

C.a Eigenwert-Problem und Separation der Variablen

Gesucht sind die Eigenfunktionen Y

$$\Delta_\Omega Y(\theta,\phi) = \lambda Y(\theta,\phi) \tag{C.1}$$

mit

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{C.2}$$

wobei die Operatoren (Multiplikationen mit Funktionen und Differentiationen) von rechts nach links angewendet werden (vergleiche 5.16). Man führt dann den Separations-Ansatz ein

$$Y = g(\cos\theta)h(\phi). \tag{C.3}$$

Mit

$$\xi = \cos\theta, \quad \frac{dg}{d\theta} = -\sin\theta\frac{dg}{d\cos\theta} = -\sqrt{1-\xi^2}\frac{dg}{d\xi} \tag{C.4}$$

folgt durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung und Division durch $h(\phi)$

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) + \frac{g(\xi)}{1-\xi^2}(\frac{d^2h(\phi)}{d\phi^2}/h(\phi)) = \lambda g(\xi). \tag{C.5}$$

Die Gleichung lässt sich nur erfüllen, wenn $d^2h(\phi)/d\phi^2/h(\phi)$ konstant ist. Da außerdem $h(\phi+2\pi) = h(\phi)$ sein soll, folgt

$$h(\phi) = e^{im\phi} \text{ mit ganzem } m. \tag{C.6}$$

Damit reduziert sich die Differentialgleichung für g auf

$$\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{dg}{d\xi}) - \frac{m^2 g(\xi)}{1-\xi^2} = \lambda g(\xi). \tag{C.7}$$

C.b Zugeordnete Legendre-Funktionen

Beachtet man, dass (wenigstens für positives m) der Faktor $e^{im\phi}$ von der analytischen Funktion $(x+iy)^m = r^m(\sin\theta)^m e^{im\phi}$ herrührt, so liegt es nahe, einen Faktor $(sin\theta)^m$ aus g herauszuziehen,

$$g(\xi) = (\sin\theta)^m G(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2}G(\xi), \tag{C.8}$$

woraus dann für G die Gleichung

$$-m(m+1)G(\xi) - 2(m+1)\xi G'(\xi) + (1-\xi^2)G'' = \lambda G(\xi) \tag{C.9}$$

folgt.

C Spherical Harmonics

C.a Eigenvalue Problem and Separation of Variables

We are looking for the eigen functions Y of (C.1) with (C.2), where the operators (multiplication by functions and differentiation) apply from right to left (compare 5.16). One introduces the ansatz (C.3).

With (C.4) one obtains by insertion into the eigenvalue equation and division by $h(\phi)$ (C.5).

This equation can only be fulfilled, if $d^2h(\phi)/d\phi^2/h(\phi)$ is constant. Since moreover one requires $h(\phi+2\pi) = h(\phi)$, it follows that

$$h(\phi) = e^{im\phi} \text{ with integer } m. \tag{C.6}$$

This reduces the differential equation for g to (C.7).

C.b Associated Legendre Functions

Considering that (at least for positive m) the factor $e^{im\phi}$ comes from the analytic function $(x+iy)^m = r^m(\sin\theta)^m e^{im\phi}$, it seems appropriate to extract a factor $(\sin\theta)^m$ out of g (C.8), so that one obtains the equation (C.9) for G.

Für die Funktion G können wir eine TAYLOR-Entwicklung ansetzen

For G we may assume a TAYLOR expansion

$$G(\xi) = \sum_k a_k \xi^k, \quad G'(\xi) = \sum_k k a_k \xi^{k-1}, \quad G''(\xi) = \sum_k k(k-1) a_k \xi^{k-2} \tag{C.10}$$

und finden durch Koeffizienten-Vergleich

and find by comparison of the coefficients

$$[m(m+1) + 2(m+1)k + k(k-1) + \lambda]a_k = (k+2)(k+1)a_{k+2}. \tag{C.11}$$

Setzen wir

If we put

$$\lambda = -l(l+1), \tag{C.12}$$

so lautet die Rekursionsformel

then the recurrence formula reads

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{(m+k+l+1)(m+k-l)}{(k+1)(k+2)}. \tag{C.13}$$

Die Reihenentwicklung bricht bei einem endlichen k ab, wenn der Zähler verschwindet, also insbesondere für ganzes nicht negatives $k = l - m$. Diesen Fall wollen wir weiter untersuchen. Ohne nähere Betrachtung sei erwähnt, dass in den anderen Fällen die Funktion Y ein nichtanalytisches Verhalten für $\cos\theta = \pm 1$ entwickelt.

The series expansion comes to an end at finite k, if the numerator vanishes, in particular for integer not negative $k = l - m$. We continue to investigate this case. Without closer consideration we mention that in the other cases the function Y develops a nonanalyticity at $\cos\theta = \pm 1$.

Der führende Term hat dann den Koeffizienten a_{l-m}. Durch Anwendung der Rekursionsformel findet man

The leading term has then the coefficient a_{l-m}. Application of the recurrence formula yields

$$\begin{aligned} a_{l-m-2} &= -\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)2} a_{l-m} \\ &= -\frac{(l-m)(l-m-1)l}{(2l-1)2l} a_{l-m}, \end{aligned} \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned} a_{l-m-4} &= \frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)}{(2l-1)(2l-3)2\cdot 4} a_{l-m} \\ &= \frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)l(l-1)}{(2l-1)(2l-3)2l(2l-2)2} a_{l-m}, \end{aligned} \tag{C.15}$$

$$a_{l-m-2k} = (-)^k \frac{(l-m)!l!(2l-2k)!}{(l-m-2k)!(l-k)!(2l)!k!} a_{l-m}. \tag{C.16}$$

Üblicherweise wählt man

Conventionally one chooses

$$a_{l-m} = \frac{(-)^m (2l)!}{(l-m)!2^l l!}. \tag{C.17}$$

Dann folgt

Then it follows that

$$G(\xi) = \frac{(-)^m}{2^l l!} \sum_k \frac{(2l-2k)!}{(l-m-2k)!} \frac{l!}{k!(l-k)!} (-)^k \xi^{l-m-2k} \tag{C.18}$$

$$= \frac{(-)^m}{2^l l!} \sum_k \binom{l}{k} (-)^k \frac{d^{l+m}\xi^{2l-2k}}{d\xi^{l+m}} = \frac{(-)^m}{2^l l!} \frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}}. \tag{C.19}$$

Man bezeichnet dann die Lösungen $g(\xi)$ in der Form

The solutions $g(\xi)$ in the form

$$P_l^m(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2} \frac{(-)^m}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2-1)^l \tag{C.20}$$

als zugeordnete LEGENDRE-Funktionen. Bis auf Normierung ist $Y_{lm}(\theta,\phi)$ durch $P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ gegeben.

Die Differentialgleichung für g hängt nur von m^2 ab, aber nicht vom Vorzeichen von m. Wir vergleichen daher P_l^m und P_l^{-m}. Es sei $m \geq 0$, dann folgt

are called associated LEGENDRE functions. $Y_{lm}(\theta,\phi)$ is given by $P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ apart from the normalization.

The differential equation for g depends only on m^2, but not on the sign of m. Therefore we compare P_l^m and P_l^{-m}. Be $m \geq 0$, then it follows that

$$\begin{aligned}
\frac{d^{l-m}}{d\xi^{l-m}}(\xi^2-1)^l &= \sum_{k=0}^{l-m}\binom{l-m}{k}\frac{d^k(\xi-1)^l}{d\xi^k}\frac{d^{l-m-k}(\xi+1)^l}{d\xi^{l-m-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{l-m}\frac{(l-m)!l!l!}{k!(l-m-k)!(l-k)!(m+k)!}(\xi-1)^{l-k}(\xi+1)^{m+k}, \qquad \text{(C.21)} \\
\frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}}(\xi^2-1)^l &= \sum_{k=0}^{l-m}\binom{l+m}{k+m}\frac{d^{m+k}(\xi-1)^l}{d\xi^{m+k}}\frac{d^{l-k}(\xi+1)^l}{d\xi^{l-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{l-m}\frac{(l+m)!l!l!}{(m+k)!(l-k)!(l-m-k)!k!}(\xi-1)^{l-k-m}(\xi+1)^k. \qquad \text{(C.22)}
\end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt

Comparison shows

$$P_l^{-m}(\xi) = \frac{(l-m)!}{(l+m)!}(-)^m P_l^m(\xi), \qquad \text{(C.23)}$$

das heißt, bis auf die Normierung stimmen die beiden Lösungen überein.

that is, apart from the normalization both solutions agree.

C.c Orthogonalität und Normierung

Wir betrachten das Normierungs-Integral

C.c Orthogonality and Normalization

We consider the normalization integral

$$N_{lml'm'} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta P_l^m(\cos\theta)e^{-im\phi}P_{l'}^{m'}(\cos\theta)e^{im'\phi}. \qquad \text{(C.24)}$$

Die Integration über ϕ ergibt

The integration over ϕ yields

$$\begin{aligned}
N_{lml'm'} &= 2\pi\delta_{mm'}\int_{-1}^{+1} P_l^m(\xi)P_{l'}^m(\xi)d\xi \\
&= 2\pi\delta_{mm'}(-)^m\frac{(l'+m)!}{(l'-m)!}\int_{-1}^{+1} P_l^m(\xi)P_{l'}^{-m}(\xi)d\xi \\
&= \frac{2\pi(l'+m)!}{(l'-m)!}\frac{\delta_{mm'}}{2^{2l}l!^2}I_m^{ll'} \qquad \text{(C.25)}
\end{aligned}$$

mit

with

$$I_m^{ll'} = (-)^m\int_{-1}^{+1}\frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}}\frac{d^{l'-m}(\xi^2-1)^{l'}}{d\xi^{l'-m}}d\xi. \qquad \text{(C.26)}$$

Durch partielle Integration findet man

Partial integration yields

$$I_m^{ll'} = (-)^m\left[\frac{d^{l+m}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{l+m}}\frac{d^{l'-m-1}(\xi^2-1)^{l'}}{d\xi^{l'-m-1}}\right]_{-1}^{+1} + I_{m+1}^{ll'}. \qquad \text{(C.27)}$$

Der erste Faktor in eckigen Klammern enthält mindestens $-m$, der zweite $m+1$ Nullstellen bei $\xi = \pm 1$. Die eckige Klammer verschwindet demnach. Das heißt $I_m^{ll'}$ ist unabhängig von m für $-l \le m \le l'$. Für $l' > l$ folgt $I_m^{ll'} = I_{l'}^{ll'} = 0$, da der erste Faktor des Integranden von $I_{l'}^{ll'}$ verschwindet. Für $l' < l$ folgt $I_m^{ll'} = I_{-l}^{ll'} = 0$, da der zweite Faktor des Integranden von $I_{-l}^{ll'}$ verschwindet. Für $l = l'$ werten wir aus

The first factor in square brackets contains at least $-m$, the second $m+1$ zeroes at $\xi = \pm 1$. The contents in square brackets vanishes therefore. Thus $I_m^{ll'}$ is independent of m for $-l \le m \le l'$. For $l' > l$ it follows that $I_m^{ll'} = I_{l'}^{ll'} = 0$, since the first factor of the integrand of $I_{l'}^{ll'}$ vanishes. For $l' < l$ one obtains $I_m^{ll'} = I_{-l}^{ll'} = 0$, since the second factor of the integrand of $I_{-l}^{ll'}$ vanishes. For $l = l'$ we evaluate

$$I_m^{ll} = I_l^{ll} = (-)^l \int_{-1}^{+1} \frac{d^{2l}(\xi^2-1)^l}{d\xi^{2l}} (\xi^2-1)^l d\xi. \tag{C.28}$$

Der erste Faktor im Integranden ist die Konstante $(2l)!$

The first factor in the integrand is the constant $(2l)!$

$$I_m^{ll} = (2l)! \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^l d\xi. \tag{C.29}$$

Das letztere Integral ergibt $2^{2l+1} l!^2/(2l+1)!$ (man findet das, in dem man den Integranden $(1+\xi)^l(1-\xi)^l$ schreibt und l mal partiell integriert, in dem man jeweils die Potenz von $1-\xi$ differenziert und die von $1+\xi$ integriert. Das ergibt das Normierungsintegral

The last integral yields $2^{2l+1} l!^2/(2l+1)!$ (one obtains this by writing the integrand $(1+\xi)^l(1-\xi)^l$ and performing partial integration l times, by always differentiating the power of $1-\xi$ and integrating that of $1+\xi$. This yields the norm

$$N_{lml'm'} = 2\pi \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \delta_{m,m'}. \tag{C.30}$$

Damit ergeben sich die orthonormierten Kugelflächenfunktionen

Thus the normalized spherical harmonics read

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}. \tag{C.31}$$

C.d Bemerkung zur Vollständigkeit

Entwickeln wir eine in den drei kartesischen Koordinaten x, y, z in der Umgebung des Ursprungs analytische Funktion f in eine Taylor-Reihe

C.d Remark on Completeness

If we expand a function f which is analytic in the Cartesian coordinates x, y, z in the vicinity of the origin in a Taylor expansion

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{ijk} a_{ijk} x^i y^j z^k = \sum_n r^n f_n(\theta,\phi), \tag{C.32}$$

so sind die Beiträge proportional zu r^n in denen mit $i+j+k=n$ enthalten. Dies sind insgesamt $(n+1)+n+(n-1)+\ldots = (n+2)(n+1)/2$ Terme

then the contributions proportional to r^n are contained in those with $i+j+k=n$. These are in total $(n+1)+n+(n-1)+\ldots = (n+2)(n+1)/2$ terms

$$f_n(\theta,\phi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} a_{n-j-k,j,k} (\frac{x}{r})^{n-j-k} (\frac{y}{r})^j (\frac{z}{r})^k. \tag{C.33}$$

Andererseits können wir die Funktion f_n auch durch die Funktionen $Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{...}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}$, darstellen, da sich diese als $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi} = ((x \pm iy)/r)^{|m|}$ multipliziert mit einem Polynom in $\cos\theta$ der Ordnung $l - |m|$ schreiben lassen. Dabei können die auftretenden Potenzen $(\cos\theta)^{l-|m|-2k} = (z/r)^{l-|m|-2k}((x^2+y^2+z^2)/r^2)^k$ geschrieben werden. Zusätzlich führen wir noch einen Faktor $((x^2+y^2+z^2)/r^2)^{(n-l)/2}$ ein. Dann erhalten wir Beiträge für $l = n, n-2, n-4, ...$ Da m jeweils von $-l$ bis l läuft, ergibt das insgesamt $(2n+1)+(2n-3)+(2n-7)+... = (n+2)(n+1)/2$ linear unabhängige (weil orthogonale) Beiträge. Der Raum dieser Funktionen hat daher die gleiche Dimension wie der der f_n. Wir können daher jede Funktion f_n durch eine Linearkombination von Kugelflächenfunktionen ausdrücken.

On the other hand we may represent the function f_n equally well by the functions $Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{...}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}$, since they can be written $(\sin\theta)^{|m|}e^{im\phi} = ((x \pm iy)/r)^{|m|}$ multiplied by a polynomial in $\cos\theta$ of order $l - |m|$. The appearing powers of the $\cos\theta$ can be written $(\cos\theta)^{l-|m|-2k} = (z/r)^{l-|m|-2k}((x^2+y^2+z^2)/r^2)^k$. In addition we introduce a factor $((x^2+y^2+z^2)/r^2)^{(n-l)/2}$. Then we obtain contributions for $l = n, n-2, n-4, ...$ Since m runs from $-l$ to l, one obtains in total $(2n+1)+(2n-3)+(2n-7)+... = (n+2)(n+1)/2$ linearly independent (since orthogonal) contributions. Therefore the space of these functions has the same dimension as that of the f_n's. Thus we may express each f_n as a linear combination of the spherical harmonics.