# 12. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

Abgabe der Lösungen: in den Übungen am 25.7.07

**Aufgabe 1: Zwillingsparadoxon mit konstanter Beschleunigung** ($3^*+2^*+2^*+1^*+1^*+1^*$ Punkte)

Bei einer geplanten Expedition zu dem 4 Lichtjahre enfernten Stern Alpha Centauri soll das Raumschiff so beschleunigt und abgebremst werden, dass Bedingungen wie im Schwerefeld der Erde simuliert werden. D.h. die Raumfahrer sollen eine Beschleunigung $g = 10\,m/s^2$ bzw. $g = -10\,m/s^2$ erfahren ($c/|g| \approx 1\,\text{Jahr}$). Auf jeden Raumfahrer muss dazu die Kraft $F = m_0 g$ wirken, wobei $m_0$ die jeweilige Ruhemasse bezeichnet.

a) Zeigen Sie dass in Erdzeit $t$ für Geschwindigkeit und Ort des Raumschiffs in der Beschleunigungsphase folgende Beziehungen gelten:

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}}, \qquad x(t) = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} - 1\right).$$

*Hinweis:* Im Ruhesystem der Erde gilt $F = \frac{d}{dt}(m_r v)$, wobei $m_r = \gamma m_0$ die relativistische Masse ist.

b) Untersuchen Sie jeweils die Grenzfälle $t \ll c/g$ und $t \gg c/g$, und stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar. Vergleichen Sie mit den entsprechenden Resultaten der nichtrelativistischen Mechanik.

c) Zu welcher (Erd-)Zeit $t_\mathrm{u}$ müssen die Raumfahrer von der Beschleunigungs- in die Bremsphase übergehen, um ihr Ziel nicht zu verfehlen? Welche Maximalgeschwindigkeit relativ zur Erde erlangt das Raumschiff?

d) Wie ist der Zusammenhang zwischen Eigenzeit $\tau$ und Erdzeit $t$ während der Beschleunigungsphase?

e) Die Raumfahrer bestimmen den Zeitpunkt der Schubumkehr natürlich mit Hilfe der Eigenzeit. Zu welchem Eigenzeitpunkt $\tau_\mathrm{u}$ müssen sie dieses Manöver durchführen?

f) Nach Erreichen ihres Zieles starten die Raumfahrer sofort wieder in Richtung Heimat. Wie lange dauert für die Menschen auf der Erde die Expedition insgesamt? Wieviel weniger sind die Raumfahrer dabei (ohne Berücksichtigung der Reisestrapazen) gealtert als ihre Zeitgenossen auf der Erde?

**Aufgabe 2: skalare Kombinationen des Feldstärketensors** ($3^*$+$2^*$ Punkte)

a) Zeigen Sie, daß sich die (Pseudo-) Skalare

$$I_1 \equiv -\tfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad I_2 \equiv -\tfrac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$$

folgendermaßen durch die Feldstärken ausdrücken lassen:

$$I_1 = \tfrac{1}{2}\,\vec{E}^2 - \tfrac{1}{2}\,\vec{B}^2, \qquad I_2 = \vec{E}\cdot\vec{B}.$$

b) Zeigen Sie, daß $I_2$ eine Viererdivergenz ist: $I_2 = \partial_\mu C^\mu$. Drücken Sie das "Chern-Simons" Vektorfeld $C^\mu$ durch das Viererpotential aus.

**Aufgabe 3: Lorentz-Transformation eines stromdurchflossenen Drahtes** ($2^*$+$2^*$+$4^*$ Punkte)

In einem unendlich langen, unendlich dünnen Draht entlang der $z$-Achse eines Inertialsystems $\Sigma$ bewegen sich Elektronen mit der linearen Ladungsdichte (d.h. Ladung pro Länge) $-\lambda$ und der konstanten Geschwindigkeit $v$ in negative $z$-Richtung. Außerdem befinden sich auf dem Draht positive Ladungsträger ("Atomrümpfe") mit der Ladungsdichte $+\lambda$, die in $\Sigma$ ruhen.

a) Wie lauten die zugehörigen Viererstromdichten $\hat{j}^\mu_-$ und $\hat{j}^\mu_+$ der Elektronen bzw. positiven Ladungsträger? Welche $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder werden von ihnen gemeinsam im Außenraum (Vakuum) erzeugt?

b) Transformieren Sie die Felder in das Inertialsystem $\Sigma'$, in dem die Elektronen in Ruhe sind.

c) In $\Sigma'$ scheint die Situation analog zu $\Sigma$ zu sein, nur daß jetzt die negativen Ladungsträger ruhen und die positiven in Bewegung sind. Trotzdem tritt jetzt, wie in (b) berechnet, ein $\vec{E}$-Feld auf. Erklären Sie das Phänomen qualitativ und quantitativ, indem Sie die transformierten Viererstromdichten betrachten.