8. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

Abgabe der Lösungen: in den Übungen am 20.6.07

Aufgabe 1: Magnetische Monopole (2+1+2+2+1 Punkt)

a) Schreiben Sie die Maxwellgleichungen als zwei Gleichungen für das komplexe Feld $\vec{\psi}$, das durch

$$\vec{\psi} \equiv \vec{E} + i\vec{B}$$

definiert ist. Wie folgt die Kontinuitätsgleichung aus dieser Form?

b) Wie sieht zu verschwindenden Quellen ($\rho = 0, \vec{j} = 0$) der "Hamilton-Operator" H in der "Schrödinger-Gleichung"

$$i\frac{\partial}{\partial t}\vec{\psi} = H\vec{\psi}$$

aus? Welcher Operator, wenn angewendet auf beide Seiten, führt zur Wellengleichung $\Box\vec{\psi} \equiv (\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)\vec{\psi} = 0$?

c) Zeigen Sie, dass die quellenfreien Maxwell-Gleichungen im Vakuum ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) unter den Dualitätstransformationen

$$\begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow \vec{E}' = \vec{E}\cos\theta + \vec{B}\sin\theta \\ \vec{B} &\rightarrow \vec{B}' = -\vec{E}\sin\theta + \vec{B}\cos\theta \end{aligned}$$

invariant sind. Wie transformiert sich $\vec{\psi}$?

d) Zeigen Sie, dass die Invarianz auch mit $\rho \neq 0$, $\vec{j} \neq 0$ gelten würde, wenn es zusätzlich zu den elektrischen Ladungen ρ_e magnetische Ladungen ρ_m gäbe. Wie lauten dann die Maxwellgleichungen? Wie transformieren sich ρ_e, ρ_m, $\vec{j}_e$, $\vec{j}_m$?

e) Angenommen, alle Teilchen hätten das gleiche Verhältnis ρ_m/ρ_e. Wie können Sie die Maxwellgleichungen wieder in ihre ursprüngliche Form, d.h. mit $\rho_m = 0$, bringen?

Aufgabe 2: Constraints (3 Punkte)

Die beiden (Vakuum) Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho,$$

die keine Zeitableitung enthalten, können als Einschränkungen (sog. Neben- bzw. Zwangsbedingungen oder "Constraints") für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aufgefasst werden. Die zeitliche Entwicklung dieser Felder ist durch die übrigen beiden Maxwell-Gleichungen gegeben. Zeigen Sie: Wenn die Felder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ die Nebenbedingungen zu einem festen Zeitpunkt t_0 erfüllen, so erfüllen sie diese automatisch auch zu jeder späteren Zeit $t > t_0$ (d.h. die Nebenbedingungen sind "konsistent" mit der Zeitevolution).

Aufgabe 3: Kugelwellen (2+2 Punkte)

Betrachten Sie die skalare Wellengleichung $\Box\psi \equiv (\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)\psi = 0$.

a) Setzen Sie den Ansatz für Kugelwellen

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{g(r, t)}{r}, \quad r = |\vec{r}|$$

in diese Gleichung ein, und bestimmen Sie eine Gleichung für $g(r, t)$.

b) Zeigen Sie, dass Ihre allgemeine Lösung zwei freie Funktionen

$$f_{1,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

enthält, und geben Sie die allgemeine Lösung an.

Aufgabe 4: rotierende geladene Kugel II (1+2+2 Punkte)

Betrachten wir noch einmal die Kugel aus Blatt 7, Aufgabe 3 (Radius R; Ladung Q, die homogen auf der Oberfläche verteilt ist; die Kugel rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_3$). Das Magnetfeld ergab sich zu

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{Q\omega R^2}{cr^5}\Theta(r-R)z\vec{r} - \left(\frac{Q\omega R^2}{3cr^3}\Theta(r-R) - \frac{2Q\omega}{3cR}\Theta(R-r)\right)\vec{e}_3.$$

a) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$, das die Kugel erzeugt.

b) Bestimmen Sie Energie- und Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes.

c) Wie groß ist die Gesamtenergie W des von der Kugel erzeugten elektromagnetischen Feldes?